

لومړۍ څپرکي

د عددونو سپټونه او د هغوی الجبري عمليې

په دې فصل کې د حقيقي عددونو (د طبيعي عددونو، د کاملو عددونو، د تامو عددونو، د ناطقو عددونو، د غیر ناطقو عددونو) سپټونه د مختلطو عددونو په شمول معرفي شويدي. د حقيقي عددونو ځيني لومړني خاصيتونه لکه تساوی، ترتیب، تجزیه، توانونه او جذرونه په لنډه توګه تر بحث لاندې نيول شويدي. او د دوو، پنځو او دولسو په پایو (قاعدو) باندې د عدديکني سیستمونو ته کتنه شويده.

طبيعي عددونه (Natural Numbers)

تر ټولو ساده عددونو ته لکه 1، 2، 3، 4، طبيعي عددونه وايي او د طبيعي عددونو ست عبارت دی

$$IN = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

طبيعي عددونه د تامو مثبتو عددونو په نامه هم يادوي.

د طبيعي عددونو ست تر دوو عمليو جمع او ضرب لاندې تړلی دی. په دی معني چه د هرو دوو طبيعي عددونو د جمع او ضرب حاصلونه بياهم يو، يو طبيعي عدد دی. په بل عبارت:

$$\forall m, n \in IN \Rightarrow m + n \in IN, \quad mn \in IN$$

کامل عددونه (Whole Numbers)

هغه ست چې د ټولو طبيعي عددونو څخه د صفر په شمول جوړ شوی وي د کاملو عددونو ست بلل کيږي

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

د کاملو عددونو ست هم د جمع او ضرب تر عمليو لاندې تړلی دي.

تام عددونه (Integer Numbers)

هغه ست چې د ټولو کاملو عددونو او ټولو منفي طبيعي عددونو څخه جوړشوی وي د تامو عددونو د ست څخه عبارت دی. او په لاندې ډول بنودل کېږي

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

د تامو عددونو ست د دریو عملیو جمع، ضرب او تفریق لاندې تړلی دی. په دې معنی چې د هرو دوو تامو عددونو د جمع، ضرب، او تفریق حاصل بیا هم یو تام عدد دی.

$$\forall m, n \in Z \Rightarrow m + n \in Z, \quad m - n \in Z, \quad mn \in Z$$

ناطق (نسبتي) عددونه (Rational Numbers)

هغه عددونه چې د دوو تامو عددونو د نسبت په توګه ارایه کیدای شي د نسبتي عددونو په نامه یادېږي.

په نسبتي عددونو کې صفر د مخرج (مقسوم علیه) په توګه د راوړنې وړ نه دی. د ناطقو عددونو سیت عبارت دی له

$$Q = \left\{ x : x = \frac{m}{n}, \quad m, n \in Z, n \neq 0 \right\}$$

هر تام عدد یو ناطق عدد دی. ځکه تام عدد هغه کسری عدد دی چې مخرج یې "۱" وي.

د ناطقو عددونو سیت تر دریو عملیو جمع، تفریق او ضرب لاندې تړلی دی او هم د صفر خلاف د ټولو ناطقو عددونو سیت د تقسیم تر عملیې لاندې هم تړلی دی.

یعنی

$$\forall x, y \in Q \Rightarrow x + y \in Q$$

$$x - y \in Q, \quad xy \in Q$$

$$\forall x, y \in Q \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{x}{y} \in Q$$

کسری عددونه: هغه ناطق عددونه چې تام نه وي (منخرج یی د 1 خلاف وي) کسري عددونه دي. او هغه کسرونه چې منخرجونه یې 10، 100، 1000، وی اعشاری کسرونه بلل کیږي.

د مثالونو په توګه

$$\frac{3}{10} = 0.3 \quad , \quad \frac{27}{100} = 0.27 \quad , \quad \frac{7}{1000} = 0.007 \quad , \quad \frac{2371}{10000} = 0.2371$$

اعشاري کسرونه دی. هغه اعشاری کسرونه چې په هغې کې د اعشاري نښې څخه وروسته یو یا څو رقمه بی نهایت ځلي تکرارېږي د اعشاری متوالي کسرونو په نامه یادېږي.

د مثال په توګه

$$0.333 \dots = 0.\overline{3} \quad , \quad 0.4 \ 356 \ 356 \ 356 \ \dots = 0.4 \ \overline{356}$$

څرنګه چې په دوهم فصل کې د کسرونو ډولونو او د هغې خاصیتونه په تفصیل سره تر بحث لاندې نیول شوي دي. نو ځکه په دې هکله د زیاتو توضیحاتو څخه ډډه کوو.

متوالي کسر د یو ناطق عدد په توګه

هر ناطق عدد د یو عادي یا متوالي کسر په شکل ارایه کیدای شي او بر عکس هر اعشاری محدود یا متوالی کسر په یو ناطق عدد بدلیدلی شي.

ثبوت: څرنګه چې نسبي عدد یو عام کسر وي که چېرې د هغې صورت پر منخرج باندې تقسیم شي یو عادي یا متوالي اعشاري کسر په لاس راځي . او موږ دلته د څو مثالونو په راوړلو اکتفا کوو.

$$I. \quad \frac{1}{3} = 0,33333... = 0,\overline{3}$$

$$II. \quad \frac{3}{4} = 0,7500 \dots$$

$$III. \quad \frac{12}{7} = 1,714285 \, 714285... = 1,\overline{714285}$$

$$IV. \quad 6 = \frac{6}{1} = 6,0000 \dots$$

بر عکس هر متوالي اعشاري کسر په عام کسر باندې بدليدلې شي. د مثال په توګه د $x = 0,13547\overline{}$ متوالي کسر په نظر کې نيسو.

دا عدد په وار سره د 100000 او 100 په عددونو ضربوو اوله يو بل څخه يې تفریق کوو.

$$100\,000x = 13547,547\,547\,547\dots$$

$$100x = 13,547\,547\,547\dots$$

$$99900x = 13534$$

$$\Rightarrow x = \frac{13534}{99900} = \frac{6767}{49950}$$

$$\Rightarrow 0,13\overline{547} = \frac{6767}{49950}$$

د ناطقو عددونو په توګه ځينې جذرونه ؟

د $\sqrt{2}$ عدد يو ناطق عدد نه دی.

ثبوت که داسې فرض شي چې $\sqrt{2}$ يو ناطق عدد دی. نو هغه د يو عام کسر په

توګه ارايه کيدای شي، که چېرې د اختصار څخه روسته هغه د $\frac{p}{q}$ په شکل وی (p

او q شریک عامل نه لري)

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

له دواړوخواو د مربع کولو څخه وروسته

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2 \cdot q^2$$

لیدل کیږي چې p^2 یو جفت عدد دی، بنا پر دې p هم جفت دی او $p = 2n$ وضع کولی شو په دې صورت کې

$$(2n)^2 = 2 \cdot q^2 \Rightarrow 4 \cdot n^2 = 2 \cdot q^2 \Rightarrow 2 \cdot n^2 = q^2$$

بنا پر دې q^2 هم جفت عدد دی او په نتیجه کې q یو جفت عدد دی یعنې د $\frac{p}{q}$ کسر یو مشترک عامل لري.

او دا د فرضیې خلاف دی. نو نتیجه اخلو چې $\frac{p}{q}$ نسبي عدد نه دی.

په همدې ډول بنودلی شو چې $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ او داسې نور نسبي عددونه، نه دی که چېرې نوموړي جذرونه استخراج شي نو اعشاري کسرونه په لاس راځي چې په هغې کې له اعشاری څخه وروسته رقمونه اخر نه لري او متناوب (دورانی) هم نه دي. د مثال په توګه

$$I. \quad \sqrt{2} = 1.41421413...$$

$$II. \quad \sqrt{3} = 1.7320508...$$

$$III. \quad \sqrt{7} = 2.6457513.....$$

په همدې ډول د e ، او π عددونه هم نسبي نه دي.

غیر ناطق عددونه (Irrational Numbers)

هغه عددونه چې ناطق (نسبي) نه وی، د غیرو ناطقو عددونو په نامه یادېږي. که چېرې دا عددونه په اعشاری ډول ارایه شي، د هغوی د اعشاری څخه وروسته

رقمونه نا متناهی دی او دوره ئی هم نه وی. غیر ناطق عددونه (Q') لکه $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، π ، e او داسې نور دی.

حقیقي عددونه (Real Numbers)

هغه سېټ چې د ناطقو او غیر ناطقو عددونو څخه جوړ شوی وي د حقیقي عددونو سېټ دی. د حقیقي عددونو سېټ په IR سره نښي:

$$IR = Q \cup Q'$$

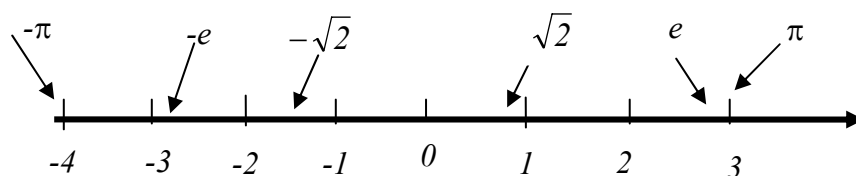
حقیقي عددونه هم د دریو عملیو، جمع، تفریق او ضرب، لاندې تړلی دي او د صفر خلاف حقیقي عددونو سېټ بیا د تقسیم تر عملیې لاندې تړلی دی. څرګنده ده چې

$$IN \subset Z \subset Q \subset R = Q \cup Q' , \quad Q' \subset R$$

د حقیقي عددونو محور

یو جهت لرونکی مستقیم خط چې یوه نقطه ئې د مبدا په حیث (د صفر عدد ځای) قبولو، په نظر کې نیول کېږي، د یو قیاسی مناسب واحد په نظر کې نیولو سره مثبت عددونه د مبدا ښی خوا او منفي عددونه، بالعکس د خط پر مخ د هرې نقطې سره یو حقیقي عدد تقابل کوي. دغه مستقیم ته د حقیقي عددونو محور وایي.

د حقیقي عددونو الجبري خاصیتونه



شکل 1

حقيقي عددونه د جمع او ضرب د عمليو سره يو ځای يوولس خاصيتونه لري او د حقيقي عددونو a ، b او c لپاره نوموړي خاصيتونه په لاندې ډول دي.

1. $a + b \in R$, د جمع د تړلتوب خاصيت
2. $a \cdot b \in R$, د ضرب د تړلتوب خاصيت
3. $a + b = b + a$, د جمع بدلونه
4. $ab = ba$, د ضرب بدلونه
5. $a + (b + c) = (a + b) + c$ د جمع اتحادي خاصيت
6. $a(bc) = (ab)c$ د ضرب اتحادي خاصيت
7. $a + 0 = a$ د جمع د عینیت عنصر (صفر عنصر)
8. $a \cdot 1 = a$ د ضرب د عینیت عنصر (واحد عنصر)
9. $a + (-a) = 0$ د جمع په عملیه کې معکوس عنصر
10. $a \cdot a^{-1} = 1$ د ضرب د عملی معکوس عنصر
11. $a(b + c) = ab + ac$ په جمع کې د ضرب توزیع

په حقيقي عددونو کې د ترتيب خاصيتونه

1. درې گوني خاصيت

د حقيقي عددونو د هرې جوړې x او y لپاره يو له دې دريو خاصيتونو نه صدق کوي.

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y$$

$$\forall x, y, z \in R : x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z \quad \text{2. انتقالي خاصيت}$$

$$\forall x, y, z \in R : x < y \Rightarrow x + z < y + z \quad \text{3. جمعي خاصيت}$$

$$\forall x, y, z \in R : \begin{cases} x > 0, x < y \Rightarrow xz < yz \\ x < 0, x < y \Rightarrow xz > yz \end{cases} \quad \text{4. ضربې خاصيت}$$

په حقيقي عددونو کې د برابري (تساوي) خاصيتونه

$$\forall x \in R \Rightarrow x = x \quad \text{1. انعکاسي خاصيت}$$

$$\forall x, y \in R : x = y \Rightarrow y = x \quad \text{2. تناظري خاصيت}$$

$$\forall x, y, z \in R : x = y, y = z \Rightarrow x = z \quad \text{3. انتقالي خاصيت}$$

$$\forall x, y, z \in R : x = y \Rightarrow y + z = x + z \quad \text{4. جمعي خاصيت}$$

$$\forall x, y, z \in R : x = y \Rightarrow yz = xz \quad \text{5. ضربې خاصيت}$$

$$\forall x, y, z \in R : y + z = x + z \Rightarrow x = y \quad \text{6. د جمع حذفې خاصيت}$$

$$\forall x, y, z \in R, z \neq 0 : yz = xz \Rightarrow x = y \quad \text{7. د ضرب اختصاري خاصيت}$$

په حقيقي عددونو کې مطلقه قيمت

د تعريف سره سم د يو حقيقي عدد x مطلقه قيمت عبارت دی له

$$|x| = \begin{cases} x & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$

مثالونه

$$\begin{aligned} (i) \quad |4| &= 4 & , & \quad (ii) \quad |-7| = -(-7) = 7 \\ (iii) \quad |0| &= 0 & , & \quad (iv) \quad |1 - \sqrt{11}| = \sqrt{11} - 1 \end{aligned}$$

د مطلقه قيمت خاصيتونه

$$\begin{aligned} (i) \quad |-x| &= |x| & , & \quad (ii) \quad |xy| = |yx| \\ (iii) \quad \left| \frac{x}{y} \right| &= \frac{|x|}{|y|} & , & \quad (iv) \quad |x + y| \leq |x| + |y| \end{aligned}$$

مثالونه:

$$\begin{aligned} (i) \quad |-3 + 4| &= |1| = 1 < |-3| + |4| = 7 \\ (ii) \quad |4 + 5| &= |9| = 9 & , & \quad (iii) \quad \left| \frac{-3}{7} \right| = \frac{3}{7} = \frac{|-3|}{|7|} \\ (iii) \quad |(-5)6| &= |-30| = 30 = 5 \times 6 = |-5| \cdot |6| \end{aligned}$$

مختلط عددونه

د موهومي عدد $i = \sqrt{-1}$ په نظر کې نيولو سره، يو مختلط عدد د $z = a + bi$ شکل لري. په داسې حال کې چې a او b حقيقي عددونه دي. يعنې د مختلطو عددونو سېټ عبارت دی له

$$\mathbb{C} = \{z : z = a + bi, i = \sqrt{-1}, a, b \in \mathbb{R}\}$$

که چېرې په مختلط عدد $z = a + bi$ کې $b = 0$ وي نوموړی عدد حقيقي دی. په بل عبارت د حقيقي عددونو سېټ د مختلطو عددونو د سېټ یو فرعي سېټ دی.

بنا پر دې

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

دلته د مختلطو عددونو سېټ فقط د عددونو د سېټونو په لړ کې معرفي شو. خو د الجبر په بحثونو کې د مختلطو عددونو سېټ په تفصيل سره تر بحث لاندې نیول کېږي.

په طبیعي عددونو کې ضربی عامل (factor)

د یو طبیعي عدد هر ضربی عامل په حقیقت کې دهغې عدد یو قاسم دی یعنې هغه عدد پر نوموړي ضربی عامل باندې پوره تقسیم کېږي. کیدای شي یو عدد څو ضربی عوامل ولري. د مثال په توګه د 2، 4، 5، او 10 عددونه هر یو د 20 یو یو ضربی عامل دی.

مضرب (Multiple)

هغه عددونه چې پر یو عدد پوره تقسیم کیدای شي ددې عدد مضربونه بلل کېږي. یعنې د یو عدد مضربونه د نوموړي عدد څو برابره (دوه برابره، درې برابره، څلور برابره) وي. دیو عدد مضربونه متناهی نه بلکه نا متناهی وی. د مثال په توګه 10، 15، 20، 25، 30، او داسې نور د 5 عدد مضربونه دی.

اولیه عددونه (Prime Number)

د صفر خلاف یو طبیعي عدد چې د یو او خپل ځان څخه بل کوم ضربی عامل ونه لري (پر هېڅ بل عدد باندې پوره نه شي تقسیم کیدلی) د اولیه عدد په نوم یادېږي.

هغه اولیه عددونه چې د دوه څخه زیات رقمونه ونه لري عبارت دي له

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 7 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 23 & 29 & 31 & 37 & 41 & 43 & 47 & 53 & 59 \\ 61 & 67 & 71 & 73 & 79 & 83 & 89 & 91 & 97 \end{array}$$

د یو طبیعي عدد ضربی عوامل که چېرې اولیه عددونه وي نو د اولیه عواملو په نوم یادېږي .

یو طبیعي عدد چې د یو او پنځله عدد څخه پرته د څو عددونو د حاصل ضرب په حیث ارایه کیدای شي د مرکب عدد (composete number) په نوم یادېږي. لکه د 12، 30 عددونه.

$$12 = 2 \times 2 \times 3, \quad 30 = 2 \times 3 \times 5$$

هغه عدد چې پر 2 پوره تقسیم شي جفت عدد (even number) او هغه عدد چې جفت نه وي تاق عدد (odd number) ویل کېږي.

د طبیعي عددونو تجزیه (factoring of Natural Numers)

د یو عدد د ضربی عواملو پیدا کولو عملیه د هغې عدد د تجزیې په نوم یادېږي. د یو عدد ارایه د هغې د اولیه عواملو د حاصل ضرب په حیث د هغې عدد تجزیه شوي شکل دی. د مثال په توګه

$$a) \quad 150 = 2 \times 3 \times 5 \times 5, \quad b) \quad 252 = 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 7$$

د عددونو تجزیه د پاره لازم دي چې پر ځینو معمولي عددونو باندې د تقسیم قابلیت طرحه شي.

د عددونو د تقسیم قابلیت (Divisibility of numbers)

که چېرې یو طبیعي عدد پر بل باندې دا ډول تقسیم شي چې باقیمانده ئې صفر شي. نو وائي چې نوموړی عدد پر دوهم عدد باندې پوره د تقسیم وړ دی. لکه چې 12 پر 2، 3، 4 او 6 پوره د تقسیم وړ دي.

پر دوو باندې د تقسیم قابلیت. که چېرې د یو عدد د یو رقم صفر یا جفت عدد وي هغه پر دوو د تقسیم وړ دی. د مثال په توګه 1350، 124، 230، 118 او داسی نور.

پر 3 باندې د تقسیم قابلیت

که چېرې د یو عدد د رقمونو مجموعه پر 3 د تقسیم وړ وي، هغه عدد پر 3 د تقسیم وړ دی. لکه 123، 1455، 432000 و 780012. ددې هر یو عدد د رقمونو مجموعه پر 3 د تقسیم وړ دی.

$$123 \Rightarrow 1 + 2 + 3 = 6, \quad 1455 \Rightarrow 1 + 4 + 5 + 5 = 15$$

$$432000: \Rightarrow 4 + 3 + 2 + 0 + 0 + 0 = 9,$$

$$780012: \Rightarrow 7 + 8 + 0 + 0 + 0 + 1 + 2 = 18$$

پر 4 باندې د تقسیم قابلیت.

په هغه صورت کې چې د یو عدد یو او ده رقمونه صفر وي او یا د یو دوه رقمي عدد په توګه پر 4 د تقسیم وړ وي. هغه عدد پر 4 د تقسیم وړ دی. د مثال په توګه 1312، 10024، 1300 اړونده رقمونه 12، 24، ... دی. او پر 4 د تقسیم وړ دي.

پر 5 باندې د تقسیم قابلیت.

که چیرې د یو عدد اول رقم 5 یا صفر وي هغه عدد پر 5 د تقسیم وړ دی لکه

45، 240، 6000 او 105 پر 5 د تقسیم وړ دي.

پر 6 باندې د تقسیم قابلیت

که چېرې یو عدد په عین وخت کې پر 2 او 3 د تقسیم وړ وي هغه عدد پر 6 د تقسیم وړ دی. لکه 12، 42، 345، 1200.

پر 7 باندې د تقسیم قابلیت

که چېرې د یو عدد د یو رقم دوه چنده د متبقي ارقامو څخه تفریق او هغه تفریق حاصل پر 7 د تقسیم وړ وي. نو هغه عدد پر 7 د تقسیم وړ دی. د مثال په توګه د 294، 315 او 350 عددونه پر 7 د تقسیم وړ دي ځکه چې

$$294 \Rightarrow 29 - 2 \times 4 = 29 - 8 = 21$$

$$315 \Rightarrow 31 - 2 \times 5 = 31 - 10 = 21$$

$$350 \Rightarrow 35 - 2 \times 0 = 35 - 0 = 35$$

$$3164 \Rightarrow 316 - 2 \times 4 = 316 - 8 = 308$$

$$\Rightarrow 30 - 2 \times 8 = 14$$

پر 8 باندې د تقسیم قابلیت .

که چېرې د یو عدد لومړني درې رقمونه، د یو درې رقمي عدد په توګه پر 8 باندې د تقسیم وړ وي. نو هغه عدد پر 8 د تقسیم وړ دی. ځکه چې 008، 016، 824 او 032 هر یو پر 8 د تقسیم وړ دی.

پر 9 باندې د تقسیم قابلیت .

که چېرې د یو عدد د ټولو رقمونو مجموعه پر 9 باندې د تقسیم وړ وي، نو هغه عدد پر 9 د تقسیم وړ دی. لکه 108، 324، 1629 او 32499، چې د هغوی د هر یو د رقمونو مجموعه پر 9 د تقسیم وړ دی.

$$108 \Rightarrow 1 + 0 + 8 = 9 \quad , \quad 324 \Rightarrow 3 + 2 + 4 = 9$$

$$1629 \Rightarrow 1 + 6 + 2 + 9 = 18 \quad , \quad 32499 \Rightarrow 3 + 2 + 4 + 9 + 9 = 27$$

پر 10 باندې د تقسيم قابليت.

که چېرې د يو عدد لومړی رقم صفر وي هغه عدد پر 10 تقسيم وړ دی . لکه
1230، 2000، 100، 680 او داسې نور.

پر 11 باندې د تقسيم قابليت.

که چېرې د يو عدد د تاقو مرتبو د رقمونو مجموعه د جفت مرتبو د رقمونو د مجموعې څخه تفریق شي او د تفریق دا حاصل صفر يا پر 11 د تقسيم وړ وي نو هغه عدد پر 11 د تقسيم وړ دی لکه 66، 2970، 1353 او 190829.

$$66 \Rightarrow 6 - 6 = 0 \quad , \quad 2970 \Rightarrow 2 + 7 - (9 + 0) = 9 - 9 = 0$$

$$1353: \Rightarrow 1 + 5 - (3 + 3) = 6 - 6 = 0$$

$$828091: \Rightarrow 8 + 8 + 9 - (2 + 0 + 1) = 25 - 3 = 22$$

هغه مطلوب تفاضلونه 0 او 22 دي. بنا پر دې دا هر يو راکړل شوی عدد پر 11 باندې د تقسيم وړ دي.

يادداشت

د 2 څخه تر 11 پورې عددونو باندې د تقسيم قابليت په مرسته کولی شو د رياضي عادي مسايل حل کړو. مگر ممکنه ده چې د رياضي په اختصاصي مسايلو کې پر اوليه عددونو باندې د تقسيم قابليت ته اړتيا پيدا شي.
د تقسيم قابليت په 13، 17، 19 باندې هم شته، مگر دلته زيات تفصيل ته ځای نه لرو.

د تجزئې عمليه

د يو عدد د تجزئې لپاره نوموړی عدد په تدريج سره د هغې پر اوليه ضربي عواملو تقسيموو. کله چې په تقسيم کې باقیمانده نه وي موجود . په هر مرحله کې قاسمونه د عدد چپ خواته لیکو او خارجقسمت بني خواته د خپل مربوطه مقسوم لاندې لیکل کېږي . دا عمليه تر هغه وخت دوام پيدا کوی چې خارج قسمت 1 شي. په هغه وقت کې ټول قاسمونه په يو ستون کې لست کېږي.

1 مثال. د 120 عدد په لاندی ډول تجزیه کیږي:

$$\begin{array}{r|l}
 2 & 120 \\
 \hline
 2 & 60 \\
 \hline
 2 & 30 \\
 \hline
 3 & 15 \\
 \hline
 5 & 5 \\
 \hline
 & 1
 \end{array}
 \Rightarrow 120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5$$

2 مثال. د 6300 عدد په لاندی ډول تجزیه کیږي:

$$\begin{array}{r|l}
 2 & 6300 \\
 \hline
 2 & 3150 \\
 \hline
 3 & 1575 \\
 \hline
 3 & 525 \\
 \hline
 5 & 175 \\
 \hline
 5 & 35 \\
 \hline
 7 & 7 \\
 \hline
 & 1
 \end{array}
 \Rightarrow 6300 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$$

تر ټولو لوی مشترک قاسم (Greatest Common Divisor)

که چېرې د څو عددونو قاسمونه سره مقایسه شي ممکن ځینې قاسمونه ئې سره شریک وي. طبیعي ده چې په دی مشترکو قاسمونو کې به یو تر ټولو لوی وي چې هغې ته د هغوی تر ټولو لوی مشترک قاسم (GCD) وائي. د هر عدد تر ټولو کوچنی قاسم او د څو عددونو تر ټولو کوچنی مشترک قاسم په ټولو حالاتو کې د 1 (یو) عدد دی. چې په محاسبه د پام وړ نه دی.

3 مثال. د 12، 30، او 42 مشترک قاسمونه پیدا او د هغوی تر ټولو لوی مشترک قاسم معلوم کړئ.

$$D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15\}$$

$$D(42) = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 42\}$$

د مشترکو قاسمونو ست $CD(12, 30, 42) = \{1, 2, 3, 6\}$ او د 12 ، 30 ، 42 تر ټولو لوی مشترک قاسم عبارت دی له $GCD(12, 30, 42) = 6$ دی.

د عددونو د تر ټولو لوی مشترک قاسم معلومول

اول. د تجزئې میتود. د څو عددونو د تر ټولو لوی مشترک قاسم د معلومولو لپاره ، لومړی دا هر عدد د اولیه عددونو په ضربی عواملو تجزیه کوو د هغوی څخه د هغو ضربی مشترکو عاملونه حاصل ضرب چه تر ټولو کم توانونه لري د مطلوبه تر ټولو لوی مشترک قاسم څخه عبارت دی.

4 مثال. د 108 او 420 تر ټولو لوی مشترک قاسم معلوم کړی.

$$108 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$420 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \Rightarrow GCD(108, 420) = 2 \times 2 \times 3 = 12$$

دویم. د مشترکو قاسمونو میتود. په دې میتود کې عددونه همزمان تر هغه وخته پوري په مشترک قاسم تقسیموو تر څو بل مشترک قاسم وجود ونه لري. ددی ټولو مشترکو قاسمونو د ضرب د حاصل څخه د دوی تر ټولو لوی مشترک قاسم په لاس راځي.

5 مثال. د 60 ، 420 ، او 660 تر ټولو لوی مشترک قاسم پیدا کړی

10	60	420	660	$\Rightarrow$	$GCD(60, 420, 660) = 10 \times 6 = 60$
6	6	42	66		
	1	7	11		

دریم. د اقلیدس میتود. په دې روش کې د دوددونو د تر ټولو لوی مشترک قاسم پیدا کولو لپاره، په لومړۍ قدم کې هغه لوی عدد پر کوچني عدد تقسیموي، په دوهمه مرحله کې هغه کوچنی عدد پر باقیمانده باندې تقسیموي، په دریمه مرحله کې د لومړۍ مرحلې باقیمانده د دوهمې مرحلې پر باقیمانده باندې تقسیموي دا عملیه په پرلپسې ډول ادامه پیدا کوي، داسې چې په هره مرحله کې مخکښی باقیمانده پر وروستی باقیمانده باندې تقسیمېږي تر څو یو باقیمانده صفر شي، په دې حالت کې د صفر خلاف آخرین باقیمانده د نوموړي دوو عددونو تر ټولو لوی مشترک قاسم دی.

6 مثال: د 132 او 252 تر ټولو لوی مشترک قاسم پیدا کړئ.

$$\frac{252}{132} = 1 \frac{120}{132} \Rightarrow \frac{132}{120} = 1 \frac{12}{120} \Rightarrow \frac{120}{12} = 10 \Rightarrow GCD(132, 252) = 12$$

او یا

$$\begin{array}{r} 1 \\ 132 \overline{)252} \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ 120 \overline{)132} \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \\ 12 \overline{)120} \end{array}$$

$$\frac{132}{120} \Rightarrow \frac{120}{12} \Rightarrow \frac{120}{\times} \Rightarrow GCD(132, 252) = 12$$

تر ټولو کوچنی مشترک مضرب (*Least Common Multiple*)

دوه یا څو عددونه نا متناهي مشترک مضربونه لري چې د هغوی تر منځ تر ټولو لوی قیمت وجود نه لري مګر دا مضربونه تر ټولو کوچنی قیمت لري چې د هغوی تر ټولو کوچنی مشترک مضرب (*LCM*) بلل کېږي.

په بل عبارت سره د څو عددونو تر ټولو کوچنی مشترک مضرب په ټولو مضربونو کې هغه کوچنی عدد دی چې پر نوموړي عددونو هر یو باندې د تقسیم وړ وي.

د عددونو د تر ټولو کوچنی مشترک مضرب معلومول

اول. د تجزئې میتود. د څو عددونو د تر ټولو کوچنی مشترک مضرب د پیدا کولو لپاره، لومړی دا هر یو عدد په بیله توګه د اولیه عددونو په ضربی عواملو تجزیه کوو. او د هغوی د مشترکو هغه عواملو د ضرب حاصل چې تر ټولو لوړ توان ولری د غیرو مشترکو عواملو سره د مطلوبه د تر ټولو کوچنی مشترک مضرب څخه عبارت دی.

مثال 7: د 108 او 420 تر ټولو کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ.

حل:

$$108 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \Rightarrow LCM(108, 420) = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 = 3780$$

$$420 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

دوهم . د مشترکو قاسمونو میتود. په دې روش کی نوموړی عددونه په مشترکو قاسمونو همزمان تقسیم کوو تر هغې چې د دو عددونو تر منځ لا اقل مشترک قاسم وجود ونه لري نو د مشترکو قاسمونه او منفرد مقسوم علیه د حاصل ضرب څخه تر ټولو کوچنی مشترک مضرب په لاس راځي.

مثال 8: د 60، 420، او 660 تر ټولو کوچنی مشترک مضرب معلوم کړئ.

حل:

10	60	420	660	$\Rightarrow LCM = 10 \times 6 \times 1 \times 7 \times 11 = 4620$
6	6	42	66	
	1	7	11	

مثال 9: د 8، 12، 30، او 48 تر ټولو کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ

حل :

$$\begin{array}{r|rrrr}
 3 & 8 & 12 & 30 & 48 \\
 4 & 8 & 4 & 10 & 16 \\
 2 & 2 & 1 & 10 & 4 \\
 \hline
 & 1 & 2 & 5 & 2
 \end{array} \Rightarrow LCM = 3 \times 4 \times 2 \times 1 \times 1 \times 5 \times 2 = 240$$

د تر ټولو لوی مشترک قاسم او تر ټولو کوچنی مشترک مضرب د ضرب حاصل د دوو عددونو د ضرب حاصل ددې عددونو د تر ټولو لوی مشترک قاسم او تر ټولو کوچنی مشترک مضرب د حاصل ضرب سره مساوي دی. یعنې ددوو طبیعي عددونو m و n لپاره لرو چې

$$(LCM(m, n)) \times (GCD(m, n)) = m \times n$$

10 مثال. د 12 او 30 عددونو لپاره لرو چې

$$LCM(12, 30) = 60, \quad GCD(12, 30) = 6$$

$$\Rightarrow (LCM(12, 30)) \times (GCD(12, 30)) = 60 \times 6 = 360 = 12 \times 30$$

د توانونو (powers) او جذرونو (Radicals) مفهوم

دا امکان نشته چې یو عدد د مساوي ضربی عاملونو د ضرب په توګه وښودل شي ، د مثال په توګه د 32 عدد لپاره لرو چې $32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ یا $32 = 2^5$. دلته ویل کېږي چې د 32 عدد، 2 د پنځو په طاقت ښودل شویدی. د 2^5 عدد د 5 په طاقت (power) د 2 په اساس یا قاعده (base) باندې، د توان (exponent) په نامه یادېږي. د 2 عدد ته 32 عدد پنځم جذر وائي. په همدې توګه

$$81 = 3^4, \quad 25 = 5^2, \quad 1000, \quad 10^3$$

لیکل کیدای شي چې دلته 10 د 1000 دریم جذر، 5 د 25 دوهم جذر او 3 د 81 څلورم جذر دی.

دا هر یو عبارت بیا په لاندې کي په دوو عبارتونو سره لیکو.

$$25 = 5^2 \Leftrightarrow \sqrt{25} = 5, \quad 1000 = 10^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1000} = 10$$

$$81 = 3^4 \Leftrightarrow \sqrt[3]{81} = 3, \quad 32 = 2^5 \Leftrightarrow \sqrt[3]{32} = 2$$

د نمونې په توګه د $\sqrt[4]{}$ سمبول څلورم جذر، د $\sqrt{}$ سمبول دوم جذر راښيي. په دې ځای کې د 4، 2 عددونه د جذرونو مرتبې بلل کېږي. په عمومي توګه کله چې د یو عدد جذر (root) طرحه کېږي نو د هغې هدف به دوم جذر وي. د ټولو کاملو عددونو جذرونه په دقیقه توګه کامل عددونه، نه دي. د ځینو عددونو دوم جذر، بیا کامل عددونه وي. د ځینو عددونو او جذرونو نمونې په لاندې جدول کې ورکړل شوي دي.

اعداد	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
جذراعداد	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

په عمومي توګه د عددونو جذرونه تقریبي معلومیږي.

د مربع جذر (جذر المربع) محاسبه

د یو عدد مربع (دوهم) جذر د پیدا کولو په عملیه کې نوموړی عدد د بني خوا څخه دوه رقمی طبقه بندي کېږي په دې ترتیب چې خواته اخیږي یو یا دوه عددونه پاته کېږي. په هغه صورت کې ددې اخیږني عدد تقریبي جذر (تر ټولو لوی عدد چې مربع ئی د دې عدد څخه لوی نه وي) په دوو ځایو نو کې (پاس او چې خواته) لیکو او مربع ئی د هغې عدد لاندی لیکو او سره تفریق کووې. په دوهم قدم کې دوه بعدي رقمونه د باقیمانده بني خواته راګوزوو. د هغې په مقابل کې چې خواته د پورتنی

عدد (مخکښيني تقریبي جذر) دوه چنده دا ډول ځای پر ځای کړو چې ښي خواته یې د یو رقم ځای خالی وي.

اوس په دې خالي موقیعت د پورتنی عدد ښي خواته (په دوه ځایونو) کې یو تر ټولو لوی یو رقمي عدد دا ډول معلوم او لیکل کیږي چې د هغې ضرب د همدی لاس ته راوړل شوي عدد سره، د اصل عدد (باقیمانده په ځای کې)، څخه لوی نه وي. د ۱ د ضرب حاصل د هغه عدد (باقیمانده په ځای کې) لاندې لیکو او ورڅخه تفریق کوو ئې. په دریم قدم کې بیا هم دوه بعدی رقمونه په خپل ستون کې لاندې راوړو او عملیه تکراریږي. دا امکان شته چې د عملیې د اجرا کولو په وخت په ځینو مرحلو کې مطلوبه رقم صفر وی، خو هغه کوم مشکل نه پیدا کوی. ددې پروسې په ختم کې مطلوبه جذر هغه عدد دی چې په پورتنی برخه کې لاس ته راځي. یادونه کوو چې د مربوطه رقم د لټولو په ټولو پړاوونو کې بهتره ده چې تر عملي لاندې عدد د یکا رقم حذف کړو او د هغې له تقسیم څخه پر هغه عدد باندې چې په مقابل کې لیکل شویډی، د لټولو وړ رقم تخمین کړو. ممکن د هغې عین خارج قسمت تعیین نه کړی. مگر د هغې مطلوبه رقم څخه یو، دوه یا څو واحده کم په لاس راتلی شي

11 مثال. د 77284 جذر پیدا کیږي

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 7 & 8 & \\
 2 & 7 & 72 & 84 & \\
 \hline
 & 4 & & & \\
 47 & 3 & 72 & & \\
 \hline
 & 3 & 29 & & \\
 548 & 43 & 84 & & \\
 \hline
 & 43 & 84 & &
 \end{array}
 \Rightarrow \sqrt{77284} = 278$$

د جذرونو ضربی خاصیتونه

د جذرونو ځینی خاصیتونه په لاندې په ساده مثالونو کې ښودل کېږي

$$I. \sqrt[4]{3^4} = \sqrt[4]{81} = 3, \quad II. (\sqrt[3]{8})^3 = 2^3 = 8$$

$$III. \sqrt{4 \times 25} = \sqrt{100} = 10 = 2 \times 5 = \sqrt{4} \times \sqrt{25}$$

د جذرونو معلومول د تجزئې په وسیله.

د تجزئې په مرسته کولی شو د هغو عددونو جذرونه کوم چې طبیعي عددونو وی، په لاس راوړو.

خو مثالونه ئې دا لاندې راوړل کېږي.

$$I. \sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{8 \times 27} = \sqrt[3]{2^3 \times 3^3} = \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{3^3} = 2 \times 3 = 6$$

$$II. \sqrt{400} = \sqrt{4 \times 100} = \sqrt{4} \times \sqrt{100} = 2 \times 10 = 20$$

$$II. \sqrt{400} = \sqrt{4 \times 100} = \sqrt{4} \times \sqrt{100} = 2 \times 10 = 20$$

تمرینونه

لاندې عددونه په ضربی عواملو تجزیه کړئ.

(1). 42, (2). 192, (3). 770, (4). 1512, (5). 1260

(6). 1755, (7). 4096, (8). 6561, (9). 15625

د لاندې عددونو تر ټولو لوی مشترک قاسم او تر ټولو کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ.

(10). 27, 36, (11). 162, 216, (12). 16, 64, 96

(13). 24, 80, 10, (14). 125, 550, 1050, (15). 36, 72, 108, 144

لاندې عددونه محاسبه کړئ.

$$(16). (2 \times 3)^2, (17). 3^2 \times 5^3 \times 3, (18). 3\,500\,000 \times 170\,000$$

د لاندې عددونو جزرونه حساب کړئ.

$$(19). 15625, (20). 291600, (21). 10404, (22). 9801$$

۲۳. دا هر یو عدد د کسر اعشار په حیث ولیکئ

$$I. \frac{1}{7}, II. \frac{7}{8}, III. \frac{3}{4}, IV. \frac{23}{99}, V. \frac{9}{7}$$

۲۴. لاندې اعشاری کسرونه په اختصار شوي عامو کسرونو بدل کړئ.

$$I. 0,\overline{543}, II. 0.2, III. 1,002, IV. 0,\overline{37}$$

$$V. 0,\overline{5}, VI. 474747\dots, VII. 2,7182818285$$

۲۵. په لاندې عددونو کې کوم یو نسبي عدد دی.

$$I. 3,333\dots, II. 1,6, III. 3\sqrt{7}$$

$$IV. 3,\overline{0}, V. 0,125\overline{4}, VI. 0,12359108\dots$$

د حقيقي عددونو توانونه

د مخه د توانونو او جذرونو مفهوم د حساب په سطح طرح شوی دی. دلته همغه مفاهیم په سمبولیک ډول عمومیت مومي او په نهایت کې د جذر مفهوم هم د عددونو د توان په حیث توسعه پیدا کوي.

که چېرې x یو حقيقي عدد او n یو طبیعي عدد وي.

n ځلې د x حاصل ضرب “ x د n په توان” ویل کیږي او هغه په x^n نښی یعنی

$$x^n := \underbrace{xxx \cdots x}_n$$

دلته x ته قاعده (اساس)، n ته توان او x^n ته د n په توان سره د x طاقت وایي.

د توانونو قاعدې (قوانین)

د یو حقيقي عدد x او طبیعي عددونو m او n لپاره لرو چې

1. $x^m x^n = x^{m+n}$
2. $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}, x \neq 0, m > n$
3. $(xy)^n = x^n y^n$
4. $(x^m)^n = x^{mn}$
5. $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}, y \neq 0$

پورتني قاعدی د مشخصو مثالونو په وسیله په لاندې ډول توضیح کیږي

مثالونه:

1. $x^3 x^2 = (xxx)(xx) = xxxxx = x^{3+2}$
2. $\frac{x^7}{x^4} = \frac{xxxxxxx}{xxxx} = xxx = x^3 = x^{7-4}$
3. $(xy)^3 = (xy)(xy)(xy) = (xxx)(yyy) = x^3 y^3$
4. $(x^2)^3 = (x^2)(x^2)(x^2) = x^6 = x^{2 \times 3}$
5. $\left(\frac{x}{y}\right)^4 = \left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{xxxx}{yyyy} = \frac{x^4}{y^4}, y \neq 0$

د حقيقي عددونو جذرونه

که چېرې n یو طبيعي عدد x او y حقيقي عددونه وي داسې چې $x^n = y$.

په دې صورت کې x ته د y د n امې مرتبه جذر وايي. اولیکو چې:

$$\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x^n} = x$$

که چېرې n یو طاق عدد وي نو هر حقيقي عدد یو n -ام حقيقي جذر لري. مگر که

n جفت عدد وي نو د $x^n = y$ په رابطه کې د y مثبت عدد لپاره دوه امکانه

موجود دي د مثال په توګه $3^2 = 9 = (-3)^2$ يا $2^6 = 64 = (-2)^6$. په دې حالت ۹ دوه دوم جذرونه يعنې (± 3) يا 64 دوه شپږم جذرونه (± 2) لري. ديو مثبت عدد د جفتې مرتبې مثبت جذر د اصلي جذر (*principle root*) په نامه ياد وي او ليکو چې.

$$\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x^n} = |x|, n = 2k, k \in \mathbb{N}$$

منفي عددونه د جفتې مرتبې جذر نه لري پورتنی عبارت لاندی خلاصه کيږي

$1. \sqrt[n]{x^n} = x, n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ $2. \sqrt[n]{x^n} = x , n = 2k, k \in \mathbb{N}, x \geq 0$

د جذرونو قاعدې

$$3. \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}, \quad 4. \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}, y \neq 0$$

مثال

$$(i) \sqrt[3]{64x^6} = \sqrt[3]{64} \sqrt[3]{x^6} = \sqrt[3]{4^3} \sqrt[3]{(x^3)^2} = 4x^2$$

$$(ii) \sqrt[5]{\frac{32a^{10}}{b^{15}x^5}} = \frac{\sqrt[5]{32a^{10}}}{\sqrt[5]{b^{15}x^5}} = \frac{\sqrt[5]{(2a^2)^5}}{\sqrt[5]{(b^3x)^5}} = \frac{2a^2}{b^3x}$$

د توانونو تعميم (صفری، کسری، او منفي) توانونه

$$(i) 1 = \frac{x^n}{x^n} = x^{n-n} = x^0$$

$$(ii) \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2} = x^{1-2} = x^{-1}$$

$$(iii) \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\frac{n}{n}} = x = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n$$

بنا پر دی په محاسبو کې لاندې درې تعریفونه مطرح کېږي

$$4. \quad x^0 := 1, \quad 5. \quad x^{-1} := \frac{1}{x}, \quad 6. \quad x^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{x}$$

په نتیجه کې د هر تام عدد n لپاره په لاس راځي چې

$$7. \quad x^{-n} = (x^{-1})^n = \left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n}$$

همدا رنگه

$$x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m, \quad x^{\frac{m}{n}} = \left(x^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

له دې څخه په لاس راځي چې

$$(8) \quad x^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$$

بلاخره د حقيقي عددونو x و y لپاره تام عدد n لرو چې

$$(9) \quad (xy)^n = x^n y^n, \quad (10) \quad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}, \quad y \neq 0$$

مثالونه:

$$(1) \quad \frac{a^4 b^{-3} c^2}{a^5 b^{-5} c^2} = a^{4-5} b^{-3-(-5)} c^{2-2} = a^{-1} b^2 c^0 = \frac{b^2}{a}$$

$$(2) \quad \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \frac{3^{-3}}{4^{-3}} = 3^{-3} \cdot \frac{1}{4^{-3}} = \frac{1}{3^3} \cdot 4^3 = \frac{64}{27}$$

$$(3) \quad 5^0 + 4^{-\frac{1}{2}} + 8^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{4}} + \sqrt[3]{8} = 1 + \frac{1}{2} + 2 = 3\frac{1}{2}$$

$$(4) \quad 27^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{1}{3} \cdot 2} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$$

$$(5) \quad \frac{20x^6y^{10}}{5x^4y^6} = \frac{20}{5} \cdot \frac{x^6}{x^4} \cdot \frac{y^{10}}{y^6} = 4x^{6-4}y^{10-6} = 4x^2y^4$$

$$(6) \quad \frac{(3m+4n)^8(1+p)^3}{(3m+4n)^3(1+p)^2} = (3m+4n)^{8-3}(1+p)^{3-2} = (3m+4n)^5(1+p)$$

$$(7) \quad \left(\frac{7x^2y^5z^6t^4}{u^4}\right)^5 = \frac{7(x^2y^5z^6t^4)^5}{(u^4)^5} = \frac{7^5x^{10}y^{25}z^{30}t^{20}}{u^{20}}$$

$$(8) \quad \left(27x^{\frac{-7}{8}}\right)^{\frac{8}{3}} = (27)^{\frac{8}{3}} \left(x^{\frac{-7}{8}}\right)^{\frac{8}{3}} = (3^3)^{\frac{8}{3}} x^{\frac{-7 \cdot 8}{8 \cdot 3}} = 3^8 x^{-\frac{7}{3}} = \frac{3^8}{x^{\frac{7}{3}}}$$

$$(9) \quad \sqrt[3]{\frac{x^a}{x^b}} \sqrt[3]{\frac{x^b}{x^c}} \sqrt[3]{\frac{x^c}{x^a}} = \sqrt[3]{\frac{x^a}{x^b} \cdot \frac{x^b}{x^c} \cdot \frac{x^c}{x^a}} = \sqrt[3]{1} = 1$$

په مختلفو پایو (قاعدو) باندې د عددونو شمېرنه

1. د اعشاری عدد لیکنې سیستم. د عدد لیکنې په معمولی سیستم کې د “10” عدد معیار نیول شوی دی. او هر عدد د لسو رقمونو 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9 په استفاده د “10” د طاقتونو د مضربونو د مجموعې په توګه ارایه کیږي. د مثال په توګه

$$(i) \quad 2943 = 2000 + 900 + 40 + 3 = 2 \cdot 1000 + 9 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 1$$

$$\Rightarrow 2943 = 2 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 10^0$$

(ii) $485.762 = 4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3}$
 په دې سیستم کې د "10" عدد ته پایه یا قاعده (base) ویل کیږي. او له دې سببه د عدد لیکنې دا معمولی سیستم داعشاری سیستم (decimal system notation) په نامه یادېږي.

2. د عدد لیکنې سیستمونه د دوو، پنځو او دولسو په قاعدو باندې.

د اعشاري عدد لیکنې سیستم ته ورته، کیدلی شي چې عددونه د هر اختیاری عدد په قاعده (پایه) باندې ارائه کړو.

په هر سیستم کې د ضرورت وړ رقمونو شمېر (تعداد) د هغې انتخابي قاعدې (پاڼې) سره مساوی وي، داسې چې له صفر څخه شروع کیږي بیا له قاعدې څخه تر یو واحد کم پوري دوام پیدا کوي. رقمونه په معموله توګه د یو رقمي عددونو څخه انتخاب کیږي. که چېرې د ضرورت وړ رقمونو له لسو څخه زیات وي. په هغه صورت کې د مثال په توګه د 10، 11، 12 او داسې نورو په شان عددونو لپاره د الفبا د حرفونو څخه سمبولونه خوښیږي.

د 2 په قاعده د عدد لیکنې په سیستم کې (binary system notation)، د 2 د قاعدې په توګه طرح کیږي دوه رقمونه 0 او 1 ته اړتیا ده، لکه:

$$(i) \quad 10101_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 21$$

$$(ii) \quad 1000_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 8$$

$$(iii) \quad 10000_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 16$$

دا دوه رقمي عدد لیکنه د کمپیوتر د تخنیکي عملیې اصلی الګوی جوړوي. څرنگه چې د برق د جریان موجودیت او یا د هغې نه موجودیت په یو هادي کې دوه امکانه

د 0 او 1 څخه نمایندګي کوي. د موازی لینونو په یو ست کې جریان، چې هر یو یې د روبنس کولو او مړه کولو امکان ولري، د 2 په قاعده د یو عدد معرف دی. کمپیوتر عددونه او دهغوی ډول ډول عملیې د همدغه دوه رقمی عددونو په سیستم بدلوي او پرې عمل کوي.

یادونه: هغه عددونه چې اندکس ورته نه وي لیکل شوی هغه د اعشاري سیستم عددونه دي لکه 21، 8، 16.

د پنځو په قاعده د عدد لیکنې په سیستم کې (پنځه رقمي سیستم). پنځه رقمونو ته اړتیا ده چې عبارت له 0، 1، 2، 3 او 4 څخه دي، د مثال په توګه

$$(iv) \quad 4030_5 = 4 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^0 = 515$$

$$(v) \quad 10000_5 = 1 \cdot 5^4 + 0 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^0 = 625$$

البته د عدد لیکنې مختلف سیستمونه ارائه کیدلی شي خو دلته لازمه نه ده.

د یو سیستم څخه په بل سیستم باندې د عدد لیکنې بدلونه

یو عدد که په کوم یو سیستم لیکل شوی وي. کیدلی شي په اعشاري سیستم بدل شي، او بیا په لاس راغلی عدد پر هغه بل مورد نظر سیستم باندې بدلېږي. د معمولی عددونه بدلونه په یوله دې سیستمونو کې په دوه طریقو په لاس راځي.

اول. د خارجقسمت طریقه د قاعدې پر طاقتونو تقسیم.

په دې طریقه کې راکړل شوي معمولي عدد د قاعدې پر ممکنه نوي طاقت باندې تقسیموو، باقیمانده پر دا وروسته لوی طاقت تقسیموو. دا عملیه تر هغه ادامه پیدا کوي چې باقیمانده صفر شي. د خارجقسمت رقمونه د تقسیم د عملیې په ترتیب سره په مورد نظر سیستم کې اړول شوي عدد دی. تر هر څه دمخه د 2، 5، 10 او 13 قاعدو څو طاقتونه په لاندی جدول کې فهرست کوو.

a	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5
2	1	2	4	8	16	32
5	1	5	25	125	625	3125
10	1	10	100	1000	10000	100000
12	1	12	144	1728	20736	248832

1. مثال د 47 عدد د 2 په قاعده سیستم کې ارائه کړئ.

حل: څرنگه چې $2^5 = 32 < 47 < 64 = 2^6$. د جدول د دوهمې لیکې څخه لرو

چې

$$\frac{47}{32} = 1\frac{15}{32} \Rightarrow \frac{15}{16} = 0\frac{15}{16} \Rightarrow \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8} \Rightarrow \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{1} = 1\frac{0}{1}$$

دا پورتنۍ عملیه په لاندې جدول کې واضح کېږي.

باقیمانده	خارج قسمت	مقسوم علیه	مقسوم
15	1	32	47
15	0	16	15
7	1	8	15
3	1	4	7
2	1	2	3
0	1	1	1

$$\Rightarrow 47 = 101111_2$$

2 مثال. د 47 عدد د 5 په قاعده سیستم کې ارائه کړئ.

حل: څرنگه چې $5^2 = 25 < 47 < 125 = 5^3$. نو د توانونو د جدول د دریم سطر

څخه لرو چې

$$\frac{47}{25} = 1\frac{22}{25} \Rightarrow \frac{22}{5} = 4\frac{2}{5} \Rightarrow \frac{2}{1} = 2\frac{0}{1} \Rightarrow 47 = 142_5$$

داعملیه په لاندې جدول کې واضح شویده

مقسوم	مقسوم علیه	خارج قسمت	باقیمانده
47	25	1	22
22	5	4	2
2	1	2	0

$$\Rightarrow 47 = 142_5$$

دوم. پر قاعده باندې د تقسیم د باقیمانده قاعده: په دې روش کې معمول عدد په نظر کې نیولی قاعده باندې تقسیمېږي. خارج قسمت د دوهم ځل لپاره پر قاعده تقسیمېږي دا عملیه تر هغه وخته پورې ادامه پیدا کوي چې خارج قسمت صفر شي. د باقیمانده برعکس په سیستم کې د عدد د ارقامو ترتیب مطلوب دی.

3 مثال. د 47 عدد د 2 په قاعده سیستم کې ارائه کړئ.

حل:

$$\frac{47}{2} = 23\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{23}{2} = 11\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{11}{2} = 5\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{2} = 1\frac{0}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = 0\frac{1}{2}$$

لاندې جدول د کار نتیجه توضیح کوي.

مقسوم	مقسوم علیه	خارج قسمت	باقیمانده
47	2	23	1
23	2	11	1
11	2	5	1
5	2	2	1
2	2	1	0
1	2	0	1

مثال. د 47 عدد د 5 په قاعده سیستم کې ارائه کړئ.

حل

$$\frac{47}{5} = 9\frac{2}{5} \Rightarrow \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5} \Rightarrow \frac{1}{5} = 0\frac{1}{5} \Rightarrow 147 = 142_5$$

تمرینونه

لاندې افادې ساده کړئ

$$\begin{aligned} (1) \quad & 2^3 \cdot 3^2, \quad (2) \quad (-4x)^{-2}, \quad (3) \quad (x-y)^0 [(x-y)^4]^{-1/2} \\ (4) \quad & \left(\frac{3x}{4y}\right)^4, \quad (5) \quad \frac{3^{-1}x^2y^{-4}}{2^{-2}x^{-3}y^3}, \quad (6) \quad \sqrt{\frac{\sqrt[4]{a^2}\sqrt[3]{b^3}}{c^{-2}d^2}}, \quad (7) \quad \frac{(100)^2(0.01)^{-2}}{(0.0001)^{-4}} \\ (8) \quad & (25)^0 + (0.25)^{1/2} - 8^{2/3} \cdot 4^{-1/2} + (0.027)^{1/3} - (0.000001)^{1/3} \\ (9) \quad & \frac{x-25}{\sqrt{x+5}}, \quad (10) \quad \frac{a-b}{a+b} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}, \quad (11) \quad \frac{2x}{y} \sqrt[4]{\frac{2y}{x}} \end{aligned}$$

لاندې په اعشاري سیستم کې عددونه د 2 د قاعدې په سیستم کې اړانه کړئ

$$(12) \quad 100, \quad (13) \quad 1000, \quad (14) \quad 1008, \quad (15) \quad 999$$

د 2 په پایه در کړل شوي عددونه په اعشاري سیستم کې ولیکئ

$$(16) \quad 1000_2, \quad (17) \quad 11111_2, \quad (18) \quad 111_2, \quad (19) \quad 1001_2$$

لاندې عددونه د 5 قاعدې په سیستم ولیکئ.

$$(20) \quad 10000, \quad (21) \quad 98, \quad (22) \quad 10001, \quad (23) \quad 5678$$

د 5 په قاعده در کړل شوی عددونه په اعشاري سیستم کې ولیکئ.

$$(24) \quad 100_5, \quad (25) \quad 999_5, \quad (26) \quad 8000_5, \quad (27) \quad 9999_5$$

لاندې در کړل شوي عددونه د 12 په قاعده ولیکئ

$$(28) \quad 1000, \quad (29) \quad 987, \quad (30) \quad 10001, \quad (31) \quad 88888$$

د 12 په قاعده در کړل شوي سوالونه په اعشاري سیستم کې ولیکئ

$$(32) \quad 100_{12}, \quad (33) \quad 99_{12}, \quad (34) \quad E00_{12}, \quad (35) \quad RE01_{12}$$

دوهم څپر کی

په عددونو کې د کسر مفهوم

کسر په لغت کې د ماتولو په معنی دی خو په ریاضی اصطلاح کې هغه یو عدد دی چې په هغې کې د واحد څخه کم کمیت شامل وي. په دقیقه توګه کسر یو کمیت دی چې د یو واحد عدد د مساوي برخو څخه جوړ شوی دی. د مثال په توګه نیمه ډوډي (د ډوډی یو بر دوهم)، د یو متر ټوټی رخت درې څلورمې (د یو متر ټوټی رخت درې پر څلوورو). د یو لیتر اوبو څورلس دریمې. لیدل کېږي چې کسر په مشخص ډول د یو قیاسي واحد په نظر کې نیولو سره طرحه کېږي او د دوو کمیتونو څخه جوړ شوی دی.

د کسر منخرج او صورت.

عام کسر (common fraction)

د کسر منخرج (denominator). هغه کمیت دی چې مربوطه واحد په هماغه تعداد ویشل شوی وي.

(د کسر منشأ). د کسر منخرج صفر کیدلی نه شي.

د کسر صورت (numerator). هغه کمیت چې د هغه په تعداد د واحد دویشل شویو مقدارونو څخه اخیستل کېږي.

د دریو پورتنیو کسرونو واحدونه، صورتونه او منخرجونه په ترتیب سره په لاندې جدول کې ښودل کېږي.

مربوط واحد	د کسر مخرج	د کسر صورت
یوه ډوډی	2	1
ټوټه رخت په متر	4	3
لیتر اوبه	3	14

په عمومي توګه کله چې یو کسر د مجرد عدد په توګه مطرح کیږي. نو مربوطه واحد یې یوازې یو دی.

د کسر ښودنه. کسر د یو مستقیم خط په مرسته (د کسر د خط په نامه) دا ډول افاده کیږي چې مخرج یې لاندې او صورت یې د پاسه لیکل کیږي. لکه څرنګه چې پورتنی درې کسرونه عبارت دي له

$$1. \frac{1}{2}, \quad 2. \frac{3}{4}, \quad 3. \frac{14}{3}$$

د کسر قسمونه

کسر د صورت او مخرج په مقایسه په دوه ډوله دی:

اول. عادي کسر (*proper fraction*). هغه کسر دی چې په هغې کې صورت د مخرج څخه کم وي عادي کسر د یو څخه کوچنی وي. د عادي کسرونو نمونې عبارت دی له: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{13}{15}$ او $\frac{2}{17}$.

دوهم. غیر عادي کسر (*Improper fraction*) هغه کسر دی چې صورت یې له مخرج څخه کم نه وي.

لومړۍ حالت. هغه غیر عادي کسر چې صورت او مخرج ئې سره مساوي وي. د ”یو“ عدد سره مساوی دی، د مثال په توګه

$$\frac{2}{2} = \frac{5}{5} = \frac{10}{10} = \frac{25}{25} = \frac{38}{38} = 1$$

دویم حالت. که چېرې په یو غیر عادي کسر کې صورت له مخرج څخه زیات شي، هغه کسر له یو څخه لوی دی. د مثال په توګه

$$\frac{14}{3}, \frac{7}{4} \text{ او } \frac{100}{31}.$$

هر کامل عدد د یو مجازی کسر په توګه په نظر کې نیولی شو چې مخرج یې د 1 عدد وي. د مثال په توګه

$$5 = \frac{5}{1}, \quad 12 = \frac{12}{1}, \quad 100 = \frac{100}{1}$$

مخلوط عددونه (Mixed Numbers). یو غیر عادي کسر د یو کامل عدد (د صحیح عدد په نامه) او یو کسر د مجموعې په توګه شودل کیدای شي چې مخلوط عدد (کسری عدد) نومېږي. د مثال په توګه

$$\frac{14}{3} = 4 + \frac{2}{3} = 4\frac{2}{3}, \quad \frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}, \quad \frac{40}{11} = 3 + \frac{7}{11} = 3\frac{7}{11}$$

د کسر خاصیتونه

اول. که چېرې د یو کسر صورت په یو عدد ضرب یا پر یو تقسیم شي نو هغه اصلي کسر په همغه عدد ضرب یا تقسیمېږي. د مثال په توګه $\frac{3 \times 2}{7} = \frac{6}{7}$ د کسر درې برابره دی او د $\frac{8 \div 2}{11} = \frac{4}{11}$ د $\frac{8}{11}$ نیمه یې دی.

دوهم. که چېرې د یو کسر مخرج د صفر خلاف په یو عدد ضرب یا تقسیم شي نو اصلي کسر په همغه عدد په ترتیب سره تقسیم یا ضربېږي. مثلاً $\frac{2}{12} = \frac{2}{3 \times 4}$ د $\frac{2}{12}$ کسر د څلورمې برخې سره مساوی او $\frac{4}{10} = \frac{4}{10 \div 2}$ د $\frac{4}{10}$ کسر دوه برابره دی.

درېم. که چېرې د یو کسر صورت او مخرج په عین وخت کې د یو عدد سره ضرب یا پر هغې تقسیم شي په کسر کې تغیر نه راځي. مثلاً

$$\frac{12}{15} = \frac{12 \div 4}{15 \div 4} = \frac{3}{5} \quad \text{یا} \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}$$

د کسرونو بسیط او مرکب حالات: هغه کسر چې په صورت او مخرج کې (د یو څخه بغير) بل مشترک فکتور ونه لري د بسیط (اختصاری شوي) کسر په نامه یادېږي. او هغه کسر چې بسیط نه وي مرکب کسرونه ورته ویل کېږي. یو کسر بی نهایت مرکب حالات خو فقط یو بسیط حالت لري. مثلاً

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12} = \frac{7}{14} = \frac{8}{16} = \frac{9}{18} = \frac{10}{20} = \frac{11}{22} = \frac{12}{24} = \dots$$

د پورتنیو مساوی کسرونو $\frac{1}{2}$ تر ټولو مختصر (بسیط) حالت لري. په داسې حال کې چې دا نور ټول کسرونه یې مرکب دي. په بل عبارت د هغوی هر یو صورت او مخرج مشترک فکتور لري.

په محاسبه کې ښه داده چې هر کسر په بسیط حالت راوړل شي.

متجانس کسرونه. هغه کسرونه چې مخرجونه یې سره مساوی وي د متجانسو

(همجنسو کسرونو) په نامه یادېږي. د مثال په توګه د، $\frac{3}{10}$ ، $\frac{4}{10}$ ، $\frac{5}{10}$ و $\frac{7}{10}$ کسرونه

متجانس دي.

د کسرونو د شکلونو اړونه (Reduction of fraction)

په کسرونو کې د محاسبې په حالت کې کله ضرورت شي چې د هغوی شکلونه د یو حالت څخه بل حالت ته واړول شي. د مثال په توګه د غیر عادي کسر اړونه په عادي کسر، د کسر تصحیح، د یو کسري عدد اړونه په غیر عادي کسر، د کسر اړونه په بسیط (اختصار شوي) شکل، د کسرونو متجانس کول یا د کسرونو تجنيس او داسې نور.

I. د یو مخلوط کسر اړونه په غیر عادی کسر باندې (غیر واجب کسر)

که چېرې وغواړو (د مثال په توګه) د $2\frac{3}{4}$ عدد د غیر عادي کسر په شکل واپړو، نو پوهیږو چې دا عدد د 2 او $\frac{3}{4}$ (دو احد درې څلورمې) عددونو د جمع حاصل دی. څرنګه چې د 2 د $\frac{8}{4}$ (دواحد اته څلورمې) سره مساوی دي، بنا پر دې پورتنۍ مجموعه مساوی په $\frac{11}{4}$ (یولس څلورمې) کیږي. په نتیجه کې

$$2\frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4} = \frac{2 \times 4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{2 \times 4 + 3}{4} = \frac{11}{4}$$

په دې ترتیب مخلوط عدد هغه کسر دی چې منخرج یې همغه اولنۍ منخرج او صورت یې هغه صحیح عدد د منخرج سره ضرب او د صورت سره د جمع حاصل دی.

2. د غیر عادي کسر اړونه په مخلوط عدد (د کسر تصحیح)

که چېرې د یو کسر صورت د هغې منخرج څخه لوی وي، نو د مجازی کسر اړونې لپاره په مخلوط عدد باندې، لومړی د هغه صورت پر منخرج باندې په ساده ډول تقسیموو او مطلوب عدد په لاندې ډول جوړیږي.

خارجقسمت = صحیح عدد $\leftrightarrow$ باقیماند = صورت $\leftrightarrow$ مقسوم علیه = منخرج
دا دوې عملې یعنی تصحیح او غیر واجب کول د یو بل عکس دي.

1 مثال. د $\frac{23}{4}$ و $\frac{100}{25}$ کسرونه په مخلوطو شکلونو ولیکئ

$$I. \quad 4 \overline{) 23} \Rightarrow \frac{23}{4} = 5\frac{3}{4} \quad , \quad II. \quad 25 \overline{) 100} \Rightarrow \frac{100}{25} = 4\frac{0}{25} = 4$$

3. په بسیط (اختصار شوی) ډول د کسر بدلول (Reduction to Lower Terms)

هغه کسر چې صورت او منخرج یې یو فکتور او یا څو فکتورونه په ګډه سره ولري، کیدلی شي په مختصر ډول ارائه شي. داسې چې د هغې کسر صورت او منخرج په

يو وخت کې په مشترکو فکتورونو تقسیم شي. د اختصار عملیه په دریو یو تر بله سره معادلو طریقو اجرا کېږي.

2 مثال. د $\frac{30}{105}$ کسر په دریو طریقو اختصار کړئ.

$$I. \quad \frac{30}{105} = \frac{30 \div 5}{105 \div 5} = \frac{6}{21} = \frac{6 \div 3}{21 \div 3} = \frac{2}{7} \quad \text{or} \quad \frac{30}{105} = \frac{2}{7}$$

$$II. \quad \frac{30}{105} = \frac{30 \div 15}{105 \div 15} = \frac{2}{7} \quad , \quad III. \quad \frac{30}{105} = \frac{2 \times 3 \times 5}{7 \times 3 \times 5} = \frac{2}{7}$$

3 مثال. د $\frac{600}{18000}$ کسر په لاندې ډول اختصارېږي.

$$\frac{1 \times 600}{30 \times 600} = \frac{1}{30} \quad \text{or} \quad \frac{600}{18000} = \frac{6}{180} = \frac{6 \div 6}{180 \div 6} = \frac{1}{30}$$

نتیجه: که چېرې د صورت او مخرج څخه په مساوی تعداد صفرونه حذف شي د اختصار عملیه اسانه کېږي.

4 مثال

$$I. \quad \frac{70}{105} = \frac{2 \times 5 \times 7}{3 \times 5 \times 7} = \frac{2}{3} \quad , \quad II. \quad \frac{60}{84} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 5}{2 \times 2 \times 3 \times 7} = \frac{5}{7}$$

د کسرونو استثنایي اختصار.

په ځېنو وختونو کې کیدلې شي چې یو کسر د اختصار وړ وي، مگر د صورت او مخرج مشترک فکتور په ساده ګی سره د پېژندنې وړ نه وي. حتی د صورت او مخرج تجزیه په وضاحت سره نه لیدل کېږي. د مثال په توګه $\frac{1599}{6273}$ اختصار کیدلای شي مگر د صورت او مخرج مشترک فکتور یې 123 دی چې په معموله توګه وار دې واره د پېژندنې وړ نه دی. په دا ډول مواردو کې کوشش کېږي چې د تجزیې په طریقه د مسایلو پر حل باندې بریالی شو. خو په ځینو مواردو کې د کمپیوټر څخه پرته به ونه کړای شو چې اختصار وکړو. لاندې مثالونه ته پاملرنه وکړئ

$$I. \frac{1599}{6273} = \frac{13 \times 123}{17 \times 123} = \frac{13}{17}, \quad II. \frac{247}{988} = \frac{247}{2 \times 2 \times 247} = \frac{1}{4}$$

$$III. \frac{156621}{183039} = \frac{37 \times 51 \times 83}{37 \times 51 \times 97} = \frac{83}{97}$$

4. د یو کسر بدلونه په مرکب حالت باندې (Reduction to Higher Terms)

ممکن ضرورت پیدا شي چې یو کسر د یو بسیط حالت څخه و هغه حالت ته تغیر ورکړل شي چې صورت او مخرج یې مشترک مناسب فکتور ولري. په دې منظور د کسر صورت او مخرج په یو وخت کې د اړونده عدد سره ضربېږي. دا عملیه د اختصار عکس عملیه ده.

5 مثال. د $\frac{3}{5}$ کسر په مساوی کسر دا ډول واړوئ چې مخرج یې 60 وي.

حل: د غوښتل شوي کسر د لاس ته راوړنې لپاره باید د راکړل شوي کسر صورت او مخرج د 12 په عدد ضرب شي.

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 12}{5 \times 12} = \frac{36}{60}$$

5. د کسرونو هم مخرج کول (د کسرونو تجنیس)

د محاسبو لپاره ډیر وخت داسې لازمیږي چې څو کسرونه همجنس شي. یعنې دا ډول واپړول شي چې ټول یو مخرج ولري. ددې لپاره، لومړی د مخرجونو تر ټولو کوچنی مشترک مضرب د ټولو کسرونو د مشترک مخرج په توګه نیسو. وروسته بیا دا مشترک مخرج د هر کسر پر مخرج تقسیموو او خارج قسمت یې د هغې په صورت کې ضربوو. او د یو معادل کسر صورت په لاس راوړو. د یا دونې وړ ده چې د مخرجونو هر مشترک مضرب د مشترک مخرج په توګه انتخاب کیدلی شي.. مګر ښه دا ده چې د هغوی تر ټولو کوچنی انتخاب شي.

6 مثال. د $\frac{1}{4}$ ، $\frac{5}{6}$ ، $\frac{4}{15}$ او $\frac{11}{24}$ کسرونه هم جنس کړئ.

حل: لومړی 4، 6، 15، او 24 تر ټولو کوچنی مشترک مضرب پیدا کوو او د مطلوبه کسر د مشترک مخرج په توګه یې نیسو

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 4 & 6 & 15 & 24 \\ 4 & 4 & 2 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 5 & 1 \end{array} \Rightarrow LCD(4,6,15,24) = 3 \times 4 \times 2 \times 5 = 120$$

بنا پر دی

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= \frac{(120 \div 4) \times 1}{120} = \frac{30}{120}, & \frac{5}{6} &= \frac{(120 \div 6) \times 5}{120} = \frac{100}{120} \\ \frac{4}{15} &= \frac{(120 \div 15) \times 4}{120} = \frac{32}{120}, & \frac{11}{24} &= \frac{(120 \div 24) \times 11}{120} = \frac{55}{120} \end{aligned}$$

په نتیجه کې متجانس کسرونه $\frac{30}{120}$ ، $\frac{100}{120}$ ، $\frac{32}{120}$ ، $\frac{55}{120}$ په ترتیب سره د غیر متجانسو کسرونو $\frac{1}{4}$ ، $\frac{5}{6}$ ، $\frac{4}{15}$ ، $\frac{11}{24}$ سره مساوي دي.

6. د کسرونو مقایسه

د دوو کسرونو د مقایسې لپاره لاندې کسرونه په نظر کې نیسو.

لومړۍ حالت. که چېرې کسرونه مشترک صورتونه ولري، هر هغه کسر چې مخرج یې کوچنی وي هغه لوی دی. مثلاً

$$\frac{8}{9} < \frac{8}{7} < \frac{8}{5} < \frac{8}{4} < \frac{8}{3}$$

دوهم حالت. که چېرې د کسرونو مخرجونه سره مساوي د وي. نو هر هغه کسر چې صورت یې لوی وي، هغه لوی دی. مثلاً

$$\frac{2}{12} < \frac{5}{12} < \frac{6}{12} < \frac{8}{12} < \frac{11}{12}$$

دریم حالت. په هغه حالتونو کې چې د کسرونو صورتونه او مخرجونه سره مختلف وي. لومړۍ کسرونه سره همجنس کوو او بیا د دوهم دستور څخه کار اخلو.

7 مثال. د $\frac{1}{3}$ ، $\frac{2}{5}$ ، $\frac{3}{7}$ او $\frac{5}{8}$ سره مقایسه کړئ.

حل: لومړۍ کسرونه سره هم جنس کوو

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{5}{8} = \frac{280}{840}, \frac{336}{840}, \frac{360}{840}, \frac{525}{840}$$

له دې ځایه لیدل کېږي چې

$$\frac{280}{840} < \frac{336}{840} < \frac{360}{840} < \frac{525}{840} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{3}{7} < \frac{5}{8}$$

د عامو کسرونو جمع

که چېرې د یو خټکي ددوو څلورمو سره یوه بله څلورمه یو ځای شي نو دهغې درې څلورمې په لاس راځي. دا ساده مثال موږ ته د $\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$ لارښونه کوي. په دې ترتیب د کسرونو په جمع کولو کې باید لومړی دا کسرونه سره همجنس شي وروسته د صورتونه د جمع حاصل پر مشترک منخرج باندې موږ ته د نوموړو کسرونو د جمع حاصل راکوي. او په اخر کې د اختصار او تصحیح پروسې پر هغې باندې اجرا کېږي. یعنې د کسرونو په جمع کې لاندې مراحل په نظر کې نیول کېږي.

۱. د کسرونو تجنیس.

۲. د یو کسر جوړونه چې صورت یې د هغوی د صورتونو مجموعه او منخرج

یې د هغوی مشترک منخرج وی.

۳. دلزوم په صورت کې د جمع د حاصل اختصار او تصحیح.

مثالونه

$$8. \frac{2}{5} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9}$$

$$9. \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{15} = \frac{5}{15} + \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{5+2+2}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$10. \frac{1}{6} + \frac{7}{20} + \frac{4}{25} = \frac{50}{300} + \frac{105}{300} + \frac{48}{300} = \frac{50+105+48}{300} = \frac{203}{300}$$

د مخلوطو عددونو په جمع کولو کې (هغه کسرونه چې صحیح عددونه ولري) کسرونه غیر واجب کېږي او د مخکښني تعامل سره سم جمع کېږي.

11 مثال. د $3\frac{3}{4}$ او $5\frac{5}{9}$ مجموعه په لاس راوړئ.

$$3\frac{3}{4} + 5\frac{5}{9} = \frac{15}{4} + \frac{50}{9} = \frac{135}{36} + \frac{200}{36} = \frac{335}{36} = 9\frac{11}{36}$$

12 مثال. پوتنې مثال په لاندې ډول هم حل کیدلی شي.

$$3\frac{3}{4} + 5\frac{5}{9} = 3 + 5 + \frac{3}{4} + \frac{5}{9} = 8 + \frac{27+20}{36} = 8 + \frac{47}{36} = 8 + 1\frac{11}{36} = 9\frac{11}{36}$$

مثال 13. د $4 + \frac{1}{6} + 3\frac{3}{10}$ مجموعه حساب کړئ.

$$4 + \frac{1}{6} + 3\frac{3}{10} = \frac{4}{1} + \frac{1}{6} + \frac{33}{10} = \frac{120+5+99}{30} = \frac{224}{30} = \frac{112}{15} = 7\frac{7}{15}$$

یا

$$4 + 3 = 7, \quad \frac{1}{6} + \frac{3}{10} = \frac{5+9}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15} \Rightarrow 4 + \frac{1}{6} + \frac{3}{10} = 7 + \frac{7}{15} = 7\frac{7}{15}$$

د عامو کسرونو تفریق

د تفریق حسابي شرط دادې چې مفروق څخه کوچنی وي. که چیرې د یولسو، نیمو ډوډیو څخه شپږ، نیمې ډوډۍ وخورل شي، پنځه نیمې نیمې ډوډۍ پاتې کیږي. یعنې

$$\frac{11}{2} - \frac{6}{2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

بنا پر دې د کسرونو د تفریق لپاره د جمعې د عملیې په شان، د هم مخرج کولو څخه وروسته د صورتونو تفاضل پر مشترک مخرج باندې د نوموړو کسرونو د تفریق حاصل دی. یعنې د کسرونو په تفریق کې لاندې مرحلې په نظر کې نیول کیږي.

1. د کسرونو تجنیس.

2. د یو کسر جوړول چې صورت یې د صورتونو تفاضل وي پر مشترک مخرج باندې.

3. د لزوم په صورت کې د تفریق د حاصل اختصار او تصحیح.

4. مثال د $\frac{2}{5} - \frac{1}{3}$ حاصل تفریق حساب کړئ.

حل .

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{6-5}{15} = \frac{1}{15}.$$

15 مثال $15\frac{5}{9}$ د $7\frac{3}{4}$ له عدد څخه تفریق کړئ.

$$15\frac{5}{9} - 7\frac{3}{4} = \frac{140}{9} - \frac{31}{4} = \frac{560}{36} - \frac{279}{36} = \frac{281}{36} = 7\frac{29}{36}$$

16 مثال. د $5 - 2\frac{13}{20}$ تفریق حساب کړئ.

$$5 - 2\frac{13}{20} = \frac{5}{1} - \frac{53}{20} = \frac{100}{20} - \frac{53}{20} = \frac{100-53}{20} = \frac{47}{20} = 2\frac{7}{20}$$

17 مثال . د $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} - \frac{5}{6}$ مربوط عملیې تر سره کړئ.

حل .

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} - \frac{5}{6} = \frac{45}{60} + \frac{24}{60} - \frac{50}{60} = \frac{45+24-50}{60} = \frac{19}{60}.$$

د عام کسرونو ضرب

که چېرې د یوې هندواني څلورمه درې برابره شي. د هندواني درې څلورمې په لاس راځي. یعنې $3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ یا د یو متر د درې پر څلورمې نمائې د متر درې پر اتمه حصه کیږي. په بل عبارت $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ بنا پر دې د دوو کسرونو ضرب د همغه دواړه کسرونو د مخرجونو د ضرب حاصل وي. که چېرې کسرونه صحیح عددونه ولري نو باید هغوی د ضرب کولو څخه د مخه غیر واجب شي. البته د ضرورت په وخت کې د ضرب حاصل اختصار او تصحیح کیږي.

18 مثال: د $\frac{2}{9} \times \frac{3}{4}$ د ضرب حاصل پیدا کړئ.

حل :

$$\frac{2}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{9 \times 4} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

بهره ده د ضرب د عمليې په جريان كې د كسرونو صورتونه او مخرونه سره
اختصاري.

19 مثال : د $\frac{5}{9} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{35}$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.
حل:

$$\begin{aligned} & 1 \times 1 \times 1 \\ & \frac{5}{9} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{35} = \frac{5 \times 3 \times 2}{9 \times 4 \times 35} = \frac{1}{42} \\ & 3 \times 2 \times 7 \end{aligned}$$

20 مثال. د $5 \times \frac{5}{34} \times 2\frac{3}{7}$ د ضرب محاسبه كړئ.
حل:

$$\begin{aligned} & 1 \\ & 5 \times \frac{5}{34} \times 2\frac{3}{7} = \frac{5}{1} \times \frac{5}{34} \times \frac{17}{7} = \frac{5 \times 5 \times 17}{1 \times 34 \times 7} = \frac{5 \times 5 \times 17}{1 \times 34 \times 7} = \frac{25}{14} = 1\frac{11}{14} \end{aligned}$$

21 مثال. د $(1 - \frac{3}{8}) \times 1\frac{3}{5}$ عدد حساب كړئ.
حل:

$$\left(1 - \frac{3}{8}\right) \times 1\frac{3}{5} = \left(\frac{1}{1} - \frac{3}{8}\right) \times \frac{8}{5} = \frac{8-3}{8} \times \frac{8}{5} = \frac{5 \times 8}{8 \times 5} = 1$$

د عامو كسرونو تقسيم

كه چېرې د يوې خبروې دوه دريمې پر دوو نفرو تقسيم شي، هر يو نفر ته يوه
دريمه رسيږي. په بل عبارت ديوې خبروې د دوه دريمو نيمايي د خبروې يوه
دريمه كيږي. په حسابي مفهوم

$$\frac{2}{3} \div 2 = \frac{2}{3} \div \frac{2}{1} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2 \times 1}{3 \times 2} = \frac{1}{3}$$

بنا پر دی د دوو کسرونو په تقسیم کې. د تقسیم حاصل عبارت دی له: د مقسوم د ضرب حاصل د مقسوم علیه د معکوس سره.

22 مثال. د $2 \div \frac{4}{5}$ عدد حساب کړئ.

حل:

$$2 \div \frac{4}{5} = \frac{2}{1} \times \frac{5}{4} = \frac{2 \times 5}{1 \times 4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

23 مثال. د $\frac{7}{10} \div 4$ عملیه سر ته ورسوئ.

حل:

$$\frac{7}{10} \div 4 = \frac{7}{10} \div \frac{4}{1} = \frac{7}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{7 \times 1}{10 \times 4} = \frac{7}{40}$$

24 مثال. د $\frac{2}{5} \div \frac{4}{15}$ په لاس راوړئ.

حل:

$$\frac{2}{5} \div \frac{4}{15} = \frac{2}{5} \times \frac{15}{4} = \frac{2 \times 15}{5 \times 4} = \frac{1 \times 3}{1 \times 2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

25 مثال. د $6\frac{1}{4} \div 1\frac{3}{8}$ عدد حساب کړئ.

حل

$$6\frac{1}{4} \div 1\frac{3}{8} = \frac{25}{4} \div \frac{11}{8} = \frac{25}{4} \times \frac{8}{11} = \frac{25 \times 2}{1 \times 11} = \frac{50}{11} = 4\frac{6}{11}$$

26 مثال. د $(\frac{4}{5} - \frac{3}{4} + \frac{7}{20}) \div (2 - \frac{3}{5})$ عدد محاسبه کړئ.

حل

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{4} + \frac{7}{20}\right) \div \left(2 - \frac{3}{5}\right) &= \left(\frac{16}{20} - \frac{15}{20} + \frac{7}{20}\right) \div \left(\frac{10}{5} - \frac{3}{5}\right) = \frac{16 - 15 + 7}{20} \div \frac{10 - 3}{5} \\ &= \frac{8}{20} \div \frac{7}{5} = \frac{8}{20} \times \frac{5}{7} = \frac{8 \times 5}{20 \times 7} = \frac{2 \times 1}{1 \times 7} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

کسر الکسر

هغه کسر چې صورت او مخرج يې کسرونه وي، د کسر الکسر په نامه ياديږي. په حقيقت کې کسر الکسر د دوو کسرونو د تقسيم حالت رابښي. هر کسر الکسر د يو بسيط کسر او هر بسيط کسر د يو کسر الکسر په حيث ارائه کيدای شي.

مثلاً

$$i. \quad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{3} \div \frac{5}{6} = \frac{2}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{4}{5} \quad , \quad ii. \quad \frac{7}{8} = \frac{7 \div 9}{8 \div 9} = \frac{\frac{7}{9}}{\frac{8}{9}} = \frac{7}{9} \div \frac{8}{9}$$

$$iii. \quad \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{2+1}{2}}{\frac{2-1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{1} = 3$$

$$iv. \quad \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{\frac{2}{5} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{2+3}{6}}{\frac{4+5}{10}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{9}{10}} = \frac{5}{6} \times \frac{10}{9} = \frac{50}{54} = \frac{25}{27}$$

تمرینونه

1. درې واحد، څو اتمې کیږي؟ اته واحد څو دریمې کیږي؟ پنځه واحد څو څلورمې کیږي.
2. یو طاق عدد د جفتو رقمونو په کارونه سره په لاس راوړئ.
3. په یونیم واحد کې. څو څلورمې، څو اتمې او څو لسمې بیلې، بیلې موجودې دي.
4. د $\frac{8}{15}$ ، $\frac{15}{9}$ ، $\frac{23}{23}$ ، $\frac{79}{78}$ ، $\frac{13}{28}$ او $\frac{3}{5}$ ، څخه لاندې کسرونه په ګوته کړئ
الف. هغه کسرونه چې له یو څخه لوی دي،
ب. هغه کسرونه چې له یو څخه کوچني دي.
ج. هغه کسرونه چې د یو سره مساوي دي.
د. تر ټولو لوی کسر او تر ټولو کوچنی کسر.
5. یو کوچنی ۵ بسکویت او بل کوچنی ۳ بسکویت لري. کله چې دریم طفل ویني نو دا بسکویتونه سره ویشي او په عوض کې دریم کوچنی ۸ افغانی دوی ته ورکوي، نو دا پیسې د دوو کوچنیانو تر منځ عادلانه وویشي.
6. د هریو $\frac{5}{7}$ ، $\frac{7}{8}$ ، $\frac{12}{13}$ او $\frac{11}{20}$ ، کسرونو سره کوم کسرونه جمع شي چې د جمع حاصل یو شي.
7. که چېرې ۲ عدد د $\frac{5}{7}$ او $\frac{3}{4}$ کسرونو د صورتونو سره جمع شي، نو د هغوی اندازه څومره فرق سره پیدا کوي.
8. که چېرې د ۳ عدد د $\frac{5}{7}$ او $\frac{3}{4}$ کسرونو د صورتونو څخه تفریق شي نو دهغوی اندازه څومره فرق سره پیدا کوي.

9. که چېرې 2 عدد د $\frac{5}{7}$ او $\frac{3}{4}$ کسرونو د صورتونو سره ضرب شي نو دا کسرونه سره څومره فرق پیدا کوي.

10. که چېرې د 2 عدد د $\frac{5}{7}$ او $\frac{3}{4}$ کسرونو د مخرجونو سره جمع شي نو دا کسرونه څومره سره فرق پیدا کوي؟

11. دا هر یو کسر $2\frac{1}{3}$ ، $4\frac{3}{5}$ ، $10\frac{3}{7}$ او $20\frac{10}{11}$ په غیر عادی حالت ولیکئ؟

12. دا هر یو غیر عادی کسر $\frac{11}{3}$ ، $\frac{31}{5}$ ، $\frac{21}{7}$ او $\frac{11}{10}$ په عادی حالت ولیکئ.

13. دا هر یو کسر $\frac{6}{15}$ ، $\frac{14}{21}$ ، $\frac{343}{539}$ ، $\frac{121}{143}$ او $\frac{84}{126}$ اختصار کړئ.

14. دا هر یو کسر $\frac{3 \times 2 \times 5}{6 \times 4 \times 10}$ ، $\frac{21 \times 55}{13 \times 15 \times 77}$ ، $\frac{8 \times 9 \times 49 \times 33}{6 \times 11 \times 28 \times 21}$ او $\frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{7 \times 5 \times 3 \times 2 \times 11}$ اختصار کړئ.

15. د $\frac{5}{24}$ ، $\frac{5}{6}$ ، $\frac{2}{3}$ کسرونه هم مخرج کړئ؟

16. د $\frac{7}{30}$ ، $\frac{2}{27}$ او $\frac{3}{19}$ کسرونه هم مخرج کړئ؟

17. د $\frac{13}{180}$ ، $\frac{5}{18}$ ، $\frac{7}{60}$ ، $\frac{3}{40}$ کسرونه هم مخرجه کړئ.

لاندې عملیې تر سره کړئ.

$$18) \quad \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{2}{7}, \quad 19) \quad \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{5}{6}, \quad 20) \quad \frac{7}{9} + \frac{16}{25} - \frac{8}{15}$$

$$21) \quad 2\frac{15}{36} + \frac{9}{60} + \frac{25}{72}, \quad 22) \quad 3\frac{3}{35} + 1\frac{2}{105} + 2\frac{11}{420}, \quad 23) \quad 4\frac{7}{9} + 2\frac{8}{15}$$

$$24) \quad \frac{7}{45} + \frac{5}{54} + \frac{15}{36} + \frac{11}{63}, \quad 25) \quad 5\frac{1}{5} - \frac{5}{8} - \frac{7}{40} - 3$$

$$26) \quad \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}, \quad 27) \quad \frac{7}{10} \times \frac{5}{21} \times \frac{12}{13}, \quad 28) \quad 2\frac{1}{2} \times \frac{5}{9} \times \frac{14}{17}$$

$$29) \quad \left(\frac{2}{8} \times \frac{2}{9}\right) \times \left(\frac{2}{3} - \frac{50}{183}\right), \quad 30) \quad 17\frac{3}{5} \times \left(4\frac{1}{6} - 2\frac{1}{2} + 1\frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{176}$$

31. د څلويشتو دقیقو د پنځو برابرې (پنځو چندو) نیمایي څلو ثانيې کيږي.

32. د 250 کیلو گرامه د لسمې د درېي، نیمایي، نیمایي څو گرامه کيږي.

33. که چېرې یو لاسي ساعت په هر دقیقه کې $\frac{3}{7}$ ثانيې وړاندې لاړشي. نو د 21 ساعتونو وروسته به دا ساعت څو دقیقې مخ ته تللی وي. لاندې عملیې سر ته ورسوئ.

$$\begin{aligned} 34) \quad \frac{2}{5} \div 6, \quad 35) \quad 8 \div 3\frac{1}{4}, \quad 36) \quad 12\frac{9}{16} \div 3 \\ 37) \quad \frac{12}{25} \div \frac{4}{5}, \quad 38) \quad 7\frac{1}{2} \div 2\frac{6}{7}, \quad 39) \quad \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) \div \frac{19}{24} \\ 40) \quad \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right) \div \left(2 - \frac{3}{5}\right), \quad 41) \quad \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) \div \left(4\frac{1}{5} \times \frac{5}{42} \times \frac{1}{6}\right) \end{aligned}$$

42. یو نل د 5 ساعتونو او بل نل د 8 ساعتونو په اوږدو کز یو ډنډ ډکوي داوړه نلونه به دا ډنډ په څو ساعتونو کې ډک کړي.

43. اقبال په ورځ کې د 8 ساعتونو په کار کولو سره یو کار په 6 ورځو کې او حمزه چې دورځې 10 ساعتونه کار کوي همغه کار په 8 ورځو کې تمامولی شي. که دواړه نفر سره یو ځای شي او همغه کار وکړي هغه به په څومره موده کې تر سره کړي.

44. که چېرې دیو عدد د تقسیم حاصل پر بل عدد باندې چې د یو واحد په اندازه د هغې څخه لوی دی د $\frac{1}{4}$ سره مساوي او د ددوهم عدد د تقسیم حاصل پر یو بل عدد باندې چې د یو واحد په اندازه د هغې څخه لوی دی د خپل ځان څلورمه شي. د دواړو عددونه د ضرب حاصل پیدا کړئ.

45. که چېرې د یو چا پانگه په یوه معامله کې د کال $\frac{1}{3}$ برخې زیاته شي او د څلورو کالو وروسته د هغې پانگه \$1000 وي. د هغې لومړنۍ سرمایه به څو وي؟

اعشاري کسرونه

د اعشاري اصطلاح د عشر له کلمې څخه چې د لسو په معنی ده منشا اخلي او اعشاري کسرونه هغه دي چې مخرجونه یې د لسو طاقتونه لکه 10، 100، 1000 او داسې نور وي. په اعشاري قالب کې محاسبې، تر ټولو مناسب، مروج، او معمولی روش دی.

1 مثال. لاندې عددونه د اعشاري کسرونو نمونې دي.

$$\frac{4}{100}, \frac{37}{100}, \frac{23}{1000}, 9\frac{2}{100}, \frac{2358}{10}$$

په اعشاري سیستم کې عدد لیکنه

د اعشاري کسرونو لیکنه د طبیعي عدد لیکنې تعمیم شوی شکل دی، داسې چې د یوویز رقم د مبدا په توګه په نظر کې نیول کېږي او په چپه خوا کې په ترتیب سره د لسیز، زیریز، لس زیریز، سل زیریز.... او په ورته توګه بڼې خواته (د اعشاری څخه وروسته) د لسمې، سلمې، زرمې، لس زرمې.... موقیعت اخلي.

2 مثال.

$$\begin{aligned} 74318\frac{5963}{10000} &= 74318 + \frac{5000}{10000} + \frac{900}{10000} + \frac{60}{10000} + \frac{3}{10000} \\ &= 74318 + \frac{5}{10} + \frac{9}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{3}{10000} = 74318.5963 \\ 74318\frac{5963}{10000} &= 74318.5963 \end{aligned}$$

د لاندې جدول مطابق موقیعت اخلي.

ده	هزارم	صدم	دهم	علامت	یک	ده ها	صد	هزار	ده
هزارمها	ها	ها	ها	اعشاری	ها		ها	ها	هزارها
3	6	9	5	.	8	1	3	4	7

په نتیجه کې 74318.5963 دا ډول لوستل کېږي.

خلوور او يا زره درې سوه اتلس، اعشاريه، پنځه لسمې، نه سلمې، شپږ زرمې او درې لس زرمې.

يا په بل عبارت د هغې معادل خلووراويا زره درې سوه اتلس اعشاريه پنځه زره نه سوه دری شپيته.

3 مثال. د عام کسرونه په اعشاري توګه وليکي.

حل:

$$\frac{23}{1000} = 0.023, \frac{2}{10} = 0.2, 6\frac{43}{100} = 6.43, \frac{987}{10} = 98\frac{7}{10} = 98.7$$

د اعشاري کسرونو خاصیتونه

اول. د صفرونو لیکل او يا له منځه وړل په هر تعداد چې وي، د کسر ښي خوا ته د کسر په قیمت کې تغیر نه راولي.

4 مثال.

$$0.45000 = \frac{45000}{100000} = \frac{45}{100} = 0.45, \quad 0.5 = \frac{5}{10} = \frac{5000}{10000} = 0.5000$$

دوم. که چېرې د اعشاري علامه ښی خواته د یو رقم، دوه رقمه، درې رقمه، انتقال شي، نوموړی عدد په ترتیب سره، لس ځلی، سل ځلی، زر ځلی، زیاتېږي (نوموړی عدد پر لسو، سلو، زرو ضربېږي)

5 مثال

$$100 \times (0.354) = 100 \times \frac{354}{1000} = \frac{35400}{1000} = \frac{354}{10} = 35\frac{4}{10} = 35.4$$

دریم. که چیری د اعشاري علامه په ترتیب سره د یو رقم، دوه رقمونو، درې رقمونو په تعداد چپ خواته یوړل شي، نوموړی عدد لس ځلې، سل ځلې، زر ځلې او.... کمیری.

(هغه عدد پر لسو، سلو، زرو او.... تقسیموی)

6. مثال

$$35.4 \div 100 = 35 \frac{4}{10} \div 100 = \frac{354}{10} \div 100 = \frac{354}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{354}{1000} = 0.354$$

څلورم هر طبعي عدد د یو کسري عدد په حیث چې کسري رقمونه یې صفرونه وي فرض کیدلی شي.

7 مثال هر د 25 عدد د د اعشاري کسر په توګه لاندې اریه کیږي.

$$25 = 25.0 = 25.00 = 25.000 = 25.0000 = \dots$$

د اعشاري کسرونو جمع او تفریق

لومړی د اعشاري کسرونو جمع او تفریق په عام کسر کې د همدې دوو عملیو په مرسته په یو مثال کې تجربه کوو.

8 مثال

$$\begin{aligned} 2.432 + 0.35 - 0.2037 &= 2.4320 + 0.3500 - 0.2037 \\ &= \frac{24320}{10000} + \frac{3500}{10000} - \frac{2037}{10000} = \frac{24320 + 3500 - 2037}{10000} \\ &= \frac{25783}{10000} = 2.5783 \end{aligned}$$

بنا پر دې د جمع يا تفریق په عملیو کې عددونه دا ډول د یو بل د لاندې ترتیب کېږي چې د اعشاري علامه په یو ستون او اړوند ترتیب شوي رقمونه په ییلو، ییلو ستونونو کې ځای ونیسي، بیاد جمع يا تفریق عملیې، غیر کسري عددونو ته ورته صورت نیسي او د جمع حاصل د اعشاري علامې د بنی خوا څخه و چپ خوا وړل کېږي.

9 مثال. د $(2.432 + 0.35 - 0.2037)$ عدد محاسبه کړئ.

حل: د دستور سره سم عددونه منظم لیکو او عملیې سر ته رسوو.

$$\begin{array}{r} 2.432 \\ + 0.35 \\ \hline 2.7820 \\ - 0.2037 \\ \hline 2.5783 \end{array}$$

10 مثال. د $0.24367 + 17654.2 + 0.00002$ مجموعه او د

$4.5 - 2.789$ تفریق پیدا کړئ.

حل:

$$\begin{array}{r} 4.500 \\ - 2.789 \\ \hline 1.711 \end{array} \quad \text{او} \quad \begin{array}{r} 0.24367 \\ 17654.2 \\ 0.00002 \\ \hline 17654.44369 \end{array}$$

د اعشاري کسرونو ضرب

په لومړي قدم کې د عامو کسرونو د ضرب څخه د اعشاري کسرونو ضرب په یو مثال کې تجربه کوو.

$$0.12 \times 0.453 = \frac{12}{100} \times \frac{453}{1000} = \frac{12 \times 453}{100000} = \frac{5436}{100000} = 0.05436$$

بنا پر دې د اعشاري کسرونو ضرب د لاندې لارښود سره سرته رسوو.

اعشاري کسرونه د اعشاري علامې په نظر کې نه نیلو څخه پرته د طبیعي عددونو په حیث سره ضربوو بیا نو د اعشاري علامې څخه ښی خواته د مضروب او مضروب فیه په تعداد یې له ښي خوا څخه د ضرب د حاصل څخه یې جلا کوو او هغله د اعشاري علامه ځای پر ځای کوو. مخکښنئ مثال یو ځل بیا حل کوو

$$0.453$$

$$\underline{0.12}$$

$$906 \quad \Rightarrow 0.453 \times 0.12 = 0.05436$$

$$453$$

$$\underline{0.05436}$$

11 مثال. د 45.0123×2.5 ، 76×0.013 او 1000×0.00089 حاصل

ضرب لاس ته راوړئ.

حل :

$$\begin{array}{r}
 45.0123 \\
 2.5 \\
 \hline
 2250615 \\
 900246 \\
 \hline
 112.53075
 \end{array}
 ,
 \begin{array}{r}
 0.013 \\
 76 \\
 \hline
 78 \\
 91 \\
 \hline
 0.988
 \end{array}
 ,
 \begin{array}{r}
 0.00089 \\
 1000 \\
 \hline
 0.89
 \end{array}$$

د اعشاري کسرونو تقسیم

بیا هم د نمونې په توګه $0.8717 \div 23$ د عامو کسرونو د تقسیم په مرسته پیدا کوو

$$\begin{aligned}
 0.8717 \div 23 &= \frac{8717}{10000} \div 23 = \frac{8717}{10000} \times \frac{1}{23} = \frac{8717}{23} \times \frac{1}{10000} \\
 &= 379 \times \frac{1}{10000} \Rightarrow 0.8717 \div 23 = \frac{379}{10000} = 0.0379
 \end{aligned}$$

د اعشاري کسرونو تقسیم په داسې حال کې چې مقسوم علیه کسری نه وي، د ساده تقسیم په توګه سرته رسیږي، کله چې د تقسیم عملیه د اعشاري علامې څخه تیرېږي، نومول شوي علامه د خارجقسمت نوبتي موقیعت ته نقل کیږي. مخکېنۍ مثال په همدې روش سره تکرارېږي

$$\begin{array}{r}
 0.0379 \\
 23 \overline{)0.8717} \\
 \underline{69} \\
 181 \\
 \underline{161} \\
 207 \\
 \underline{207}
 \end{array}
 \Rightarrow 0.8717 \div 23 = 0.0379$$

که چېرې مقسوم عليه کسري وي. مقسوم او مقسوم عليه د کسر د صورت او مخرج په توګه فرض کوو، صورت او مخرج (مقسوم او مقسوم عليه) په یو له 10 ، 100 ، 1000 ، ... عددونو سره ضربوو تر څو د اعشاري علامه له مخرج څخه حذف شي، وروسته د تقسیم عملیه د مخکېنۍ لارښود سره سم سرته رسوو.

$$45.05679 \div 5.4 = \frac{45.05679}{5.4} = \frac{45.05679 \times 10}{5.4 \times 10}$$

$$= \frac{450.5679}{54} = 450.5679 \div 54$$

$$\begin{array}{r} 8.34385 \\ 54 \overline{) 450.5679} \\ \underline{432} \\ 185 \\ \underline{162} \\ 236 \\ \underline{216} \\ 207 \\ \underline{162} \\ 459 \\ \underline{432} \\ 270 \\ \underline{270} \end{array} \Rightarrow 450.5679 \div 54 = 8.34385$$

13 مثال: د $0.084 \div 0.7$ او $3.7 \div 0.08$ عمليې تر سره کړئ.

حل

$$0.084 \div 0.7 = \frac{0.084}{0.7} = \frac{0.084 \times 10}{0.7 \times 10} = \frac{0.84}{7} = 0.84 \div 7 = 0.12$$

$$3.7 \div 0.08 = \frac{3.7}{0.08} = \frac{3.7 \times 100}{0.08 \times 100} = \frac{370}{8} = 370 \div 8 = 46.25$$

په اعشاري کسرونو کې څلورگونې عمليې په حقيقت کې په طبيعي عددونو کې د همدې عمليو تصميم دی.

له دې جملې څخه کولی شو چې عدد پر لوی عدد تقسيم کړو. دا ډول چې لومړی د مقسوم بني خواته صفر ږدو او د هغې په عوض په خارج قسمت کې د اعشاري علامه د صفر څخه وروسته عوض کېږي او د تقسيم عمليه سرته رسيږي، که چېرې د باقیمانده عدد د مقسوم څخه کوچنی شي نو بني خواته يې صفر ځای پر ځای کېږي.

14 مثال: د $1 \div 4$ د تقسيم حاصل پيدا کړئ.

حل:

$$0.25$$

$$\begin{array}{r} 4 \overline{) 10} \\ 8 \\ \hline 20 \\ \hline 20 \\ \hline \end{array} \Rightarrow 1 \div 4 = 0.25$$

د اعشاري کسر بدلونه په عام کسر باندې

د 0.75 کسر مفهوم، پنځه او يا د سلمې، څخه دی يعنې $\frac{75}{100}$ بنا پر دې $0.75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ ، په دې ترتيب په عام کسر باندې د اعشاري کسر په بدلونه

کې د اعشاري علامې ښې خواته رقمونه د کسر په صورت کې، لیکو او په منځ
کې د اعشاري علامې پر ځای یو او پر ښې خوا یې د اعشاري علامې د ښې خوا د
رقمونو په تعداد صفرونه ږدو. صحیح عدد په اصلي موقیعت کې ځای نیسي.

15 مثال.

$$\begin{aligned} a) \quad 0.3406 &= \frac{3406}{10000} = \frac{1703}{5000}, & b) \quad 0.008 &= \frac{8}{1000} = \frac{1}{125} \\ c) \quad 6.0001 &= 6 \frac{1}{10000} = \frac{60001}{10000}, & d) \quad 0.5 &= \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

په اعشاري کسر باندې د عام کسر بدلونه

په اعشاري کسر باندې د عام کسر بدلونې هدف، د هغې کسر پیدا کول دي چې
منځ یې 10 یا 100 یا 1000 او یا.... وي او د راکړ شوي کسر سره مساوي
وي. لکه څرنګه چې $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10} = 0.5$ او یا $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100} = 0.75$

په هر حال په اعشاري کسر باندې د عام کسر د بدلونې لپاره بهتره ده چې د کسر
صورت پر منځ باندې تقسیم کړو. په دې برخه کې د تقسیم خارج قسمت،
مطلوبه اعشاري کسر دی.

ددې عملیې په اجرا کولو کې د عام کسر صورت د مقسوم پر ځای د اعشاري کسر
په توګه په نظر کې نیول کېږي چې د اعشاري علامې څخه وروسته صفرونه وي
(په کومه اندازه چې یې غواړو)

16 مثال. د $\frac{3}{4}$ او $\frac{21}{8}$ کسرونه په معادلو اعشاري کسرونو واړوئ.

حل :

$$\begin{array}{r}
 2.625 \\
 8 \overline{) 21.000} \\
 \underline{16} \\
 50 \\
 \underline{48} \\
 20 \\
 \underline{16} \\
 40 \\
 \underline{40} \\
 0
 \end{array}
 \Rightarrow \frac{21}{8} = 2.625, \quad
 \begin{array}{r}
 0.75 \\
 4 \overline{) 3.00} \\
 \underline{28} \\
 20 \\
 \underline{20} \\
 0
 \end{array}
 \Rightarrow \frac{3}{4} = 0.75$$

متناوب اعشاری کسرونه (Repeating Decimals)

هغه اعشاري کسر چې يو يا څو رقمونه يې په نامتناهي توګه تکرارېږي، د متناوب کسر (دوره يې کسر يا تکراری کسر) په نامه يادېږي. ددې اعشاري کسر غیر متناوب رقمونو ته تام رقمونه وايي.

17 مثال

$$a) 0.333\ldots, \quad b) 8.2343434\ldots, \quad c) 19.3466666\ldots$$

د متناوب کسرونو په اړانه کولو کې معمولاً د متناوبو رقمونه پر سر يوه کرښه باسي او يا هغه په يو قوس کې نيسي. او ځينې بيا د هر تکراري رقم پر سر يوه نقطه ږدي.

18 مثال

$$a) 0.333\ldots = 0.(3) = 0.\overline{3} = 0.\dot{3}$$

$$b) 8.2343434\ldots = 8.2(34) = 8.2\overline{34} = 8.2\dot{3}\dot{4}$$

$$c) \quad 19.34\,666\dots = 19.34(6) = 19.34\overline{6} = 19.34\dot{6}$$

متناوب کسرونه په حقیقت کی د دوو طبیعی عددونو د تقسیم د حاصل (عام کسر) په توګه اړانه کیدای شی، هر غیر متناوب کسر په عین وخت کې یو متناوب کسر دی. داسې چې صفر د متناوب رقم په توګه فرض کړای شی.

19 مثال

$$d) \quad \frac{1}{3} = 0.\overline{3} \quad , \quad e) \quad \frac{3}{4} = 0.75\overline{0}$$

$$f) \quad \frac{1}{7} = 0.\overline{142857} \quad , \quad g) \quad \frac{4}{13} = 0.\overline{307692}$$

د یو متناوب کسر بدلونه په عام کسر باندې

یو متناوب کسر د یو عام کسر په توګه ښودل کیدای شي داسې چې صورت یې د کسري رقمونو او تامو رقمونو تفاضل وي او په مخرج کې د هر متناوب پر ځای د 9 رقم پر ځای یو صفر ښي خواته ځای پر ځای شي.

20 مثال:

$$a) \quad 0.\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$b) \quad 0.\overline{142857} = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$$

$$c) \quad 0.42\overline{658} = \frac{42658 - 42}{99900} = \frac{42616}{99900}$$

$$d) \quad 0.000\overline{54} = \frac{54}{99000} = \frac{3}{5500}$$

تمرین

لاندې عملیې سرته ورسوئ.

1. $0.7 + 0.21$
2. $2.9701 + 0.000356$
3. $0.649 - 0.368$
4. $8.45 - 0.0079$
5. $3.87 + 2.561 - 2.00089$
6. $8.0001 - 5.8889 + 230$
7. 0.8×0.87
8. 547.69832×54.0002
9. $(0.324 - 0.00021) \times 1.023$
10. $(3.005 - 1.456) \times 0.005$
11. $(5 + 2.008 - 1.0009) \times 4.005$
12. $0.0008 \times (8 - 6.9876884)$
13. 0.000006×0.000005
14. $20000000 \times 0.000000002$
15. $26789.45 \div 0.000002$
16. $45.668 \div 1000000$
17. $450 \div 100000$
18. $450 \div 0.0000001$

لاندې اعشاري کسرونه په عامو کسرونو واړوئ.

19. 0.2 ,
20. 0.025 ,
21. 0.4528 ,
22. 0.0001
23. $0.4\dot{5}\dot{6}$,
24. $0.32\dot{6}\dot{8}\dot{5}$,
25. $0.432\dot{6}\dot{5}$

لاندې عام کسرونه په اعشاري کسرونو واړوئ.

26. $6\frac{5}{9}$,
27. $78\frac{3}{4}$,
28. $10\frac{1}{2}$

دریم څپرکی

نسبت، تناسب او فیصد

د نسبت او تناسب مفاهیم د حسابونې له اساسي قدمونو څخه شمیرل کېږي. ډیرې حسابي مسئلې د دې دوو مفاهیمو د قاعدو پر بنا حل کیدلای شي. په دې فصل کې، نسبت، تناسب، د نسبتونو او تناسبونو ډولونه په لنډه توګه مطرح کېږي.

نسبت (Ratio)

د دوو همجنسو کمیتونو تر منځ نسبت د دوی ترمنځ د عددي اندازه ګیرۍ رابطه ده. د 5 او 15 عددونو تر منځ رابطه په دوه ډوله افاده کېږي. اول د 15 او 5 ترمنځ فرق 10 دی. دوهم د 15 عدد د 5 درې برابر ده. په دې معنی چر د دوو همجنسو کمیتونو ترمنځ رابطه د هغوی د تفاضل او یا حاصل تقسیم په توګه افاده کېږي.

د تفاضل په وسیله عددي اندازه ګیري $15 \div 5 = 3$ د هندسي نسبت (geometric ratio) په نامه یادېږي.

حسابي نسبت معمولاً د کوچنیو کمیتونو په مقایسه لکه عمر، د قد اوږدوالی، د اشخاصو وزن د سپورتي ټیمونو نمبرې او داسې نورو لپاره کتور وي. حسابي نسبت اسان دی، فورمولبندي او مطالعې ته ضرورت نه لري.

کله چې په عمومي توګه د نسبت اصطلاح مطرح کېږي، له هغې څخه هدف همغه هندسي نسبت دی، د کمیتونو نسبت یو مجرد عدد دی چې د عامو یا اعشاري کسرونو په حیث ارائه کیدلای شي، مګر د هغې ارائه د عام کسر په

توگه مناسبه ده. د مثال په توگه د 3 مترو او 12 مترو تر منځ نسبت $\frac{1}{4}$ يا 0.25 دی. يا

$$3\text{ m} \div 12\text{ m} = \frac{1}{4} \quad \vee \quad 3\text{ m} \div 12\text{ m} = 0,25$$

د نسبت په موضوع کې معمولاً درې کمیتونه مطرح کېږي: لومړۍ کمیت يا مقدم کمیت (*antecedent*) دوم کمیت يا مؤخر کمیت (*Consequent*) او ددوی تر منځ نسبت (*ratio*). لومړۍ او دوهم کمیتونه په یو وخت کې د نسبت د حدونو (*terms*) په نامه یادېږي. د کمیتونو ترمنځ نسبت (د ښي څخه کيښي خواته) عبارت دي له

$$\text{نسبت} = \text{کمیت اول} \div \text{کمیت دوم}$$

$$\text{کمیت اول} = \text{کمیت دوم} \times \text{نسبت}$$

$$\text{کمیت دوم} = \text{کمیت اول} \div \text{نسبت}$$

که چېرې لومړۍ کمیت a ، دوهم کمیت b او د هغې تر منځ نسبت r وي نو

$$\frac{a}{b} = r \Leftrightarrow a = b \times r \Leftrightarrow b = \frac{a}{r}$$

دا درې ګوني کمیتونه کیدلی شي کسری عددونه (عام کسرونه يا اعشاری کسرونه) هم وي.

1. مثال: په یو مکتب کې د لومړۍ ټولګي شاګردان 45 نفره او د دوهم

ټولګي شاګردان 65 نفره دي، ددوی تر منځ نسبت پیدا کړئ.

حل: مطلوبه نسبت عبارت دی له

$$r = \frac{45}{65} = \frac{9}{13}$$

2 مثال. د کوم عدد شپږمه برخه 18 کیږي؟

حل:

$$a = 18, r = \frac{1}{6} \Rightarrow b = a \div r = 18 \div \frac{1}{6} = 18 \times 6 = 108$$

3 مثال. د یو عدد درې څلورمې 21 دي، نوموړی عدد معلوم کړئ؟

حل:

$$a = 21, r = \frac{3}{4} \Rightarrow b = a \div r = 21 \div \frac{3}{4} = 21 \times \frac{4}{3} = 28$$

4 مثال: د 60 عدد څلورپنځمې څو کیږي.

حل:

$$b = 60, r = \frac{4}{5} \Rightarrow a = 60 \times \frac{4}{5} = 48$$

تناسب (Proportion)

د نسبتونو تساوی ته تناسب وايي، په بل عبارت تناسب د دوو عامو کسرونو تساوی ده. ویل کیږي چې د a او b عددونه د c او d عددونو سره متناسب دي که چېرې.

$$a : b = c : d \quad \vee \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

د a او d دوو عددونه د تناسب د طرفینو (*extremes*) او د b او c عددونه د هغې د وسطینو (*mean*) په نامه یادېږي.

$$\begin{array}{c} \text{means} \\ \overbrace{a \quad b \quad c \quad d} \\ \text{extremes} \end{array}$$

د تناسب خاصیتونه.

اول. په هر تناسب کې د طرفینو د ضرب حاصل د وسطینو د ضرب حاصل سره مساوي دی. یعنې

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d = b \times c$$

دوم. د تناسب هر یو څلورگونى عنصر مساوى دی په: د معلومو طرفینو یا وسطینو د ضرب د حاصل نسبت د هغې هم ردیف عدد سره یعنې

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{b \times c}{d} \\ b = \frac{a \times d}{c} \\ c = \frac{a \times d}{b} \\ d = \frac{b \times c}{a} \end{cases}$$

دریم. هر تناسب په اتو شکلونو اړانه کېږي

$$\begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{d}{b} \\ \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \end{array}$$

خلورم. که چېرې په یو تناسب کې مخرجونه د هغوی پر صورتونو جمع او یا له هغې څخه تفریق شي، نوي تناسبونه په لاس راځي

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$$

پنځم. که چېرې په یو تناسب کې صورتونه د هغوی پر مخرجونه ور جمع یا د هغوی څخه تفریق شي نوي تناسبونه په لاس راځي

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b+a} = \frac{c}{d+c}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$$

شپږم. که چېرې په یو تناسب کې صورتونه یې په خپل منځ او مخرجونه یې په خپل منځ کې سره جمع شي (او یا سره تفریق شي) د تناسب ډول نه بدلیږي:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

اوم. که چېرې د یو تناسب طرفین یا وسطین سره مساوی وي، نوموړی عدد ته هندسی اوسط (د تناسب وسط) ویل کیږي. هندسی اوسط د طرفینو (یا وسطینو) د جذر سره مساوي دی

کوم چې سره مساوي نه دی.

$$\frac{a}{r} = \frac{r}{b} \Leftrightarrow r^2 = a \times b \Leftrightarrow r = \sqrt{a \times b}$$

اتم. که چېرې د یو تناسب درې عنصره د یو دوهم تناسب د دریو عناصر سره مخ پر مخ مساوی وي نو د هغوی خلورم عناصر هم ورسره مساوی دی

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Rightarrow x = d$$

5 مثال.

$$I. \quad \frac{1}{3} = \frac{4}{12} \Rightarrow 1 \times 12 = 4 \times 3$$

$$II. \quad \frac{x}{18} = \frac{5}{15} \Rightarrow x = \frac{5 \times 18}{15} = 6$$

$$III. \quad \frac{4}{5} = \frac{8}{10} \Rightarrow \frac{4+5}{5} = \frac{8+10}{10} \Rightarrow \frac{9}{5} = \frac{18}{10}$$

$$IV. \quad \frac{8}{7} = \frac{24}{21} \Rightarrow \frac{8-7}{7} = \frac{24-21}{21} \Rightarrow \frac{1}{7} = \frac{3}{21}$$

$$V. \quad \frac{5}{7} = \frac{10}{14} = \frac{5+10}{7+14} = \frac{10-5}{14-7} \Rightarrow \frac{5}{7} = \frac{10}{14} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$

$$VI. \quad \frac{x}{25} = \frac{4}{x} \Rightarrow x^2 = 4 \times 25 \Rightarrow x = \sqrt{4 \times 25} = \sqrt{100} = 10$$

6 مثال. که چېرې د 5 ټوکو کتابچو بیه 560 افغانی وي. نو په 10080 افغانی خو ټوکه کتابچې اخیستل کیدلی شي ؟

حل

$$\frac{5vol}{x} = \frac{560Af}{10080Af} \Rightarrow x = \frac{5vol \times 10080Af}{560Af} = 90vol$$

په نتیجه کې په 10080 افغانیو، 90 جلدو کتابچې اخیستل کیدای شي.

7 مثال. د مالګې او اوبو نسبت د خوړو په یو مالګیز محلول کېنې $\frac{1}{7}$ ده. که

چېرې د اوبو دروندوالی 28 کیلو ګرامه وي نو د محلول دروندوالی څومره دی ؟

حل

$$\frac{NaCl}{28 \text{ kg}} = \frac{1}{7} \Rightarrow NaCl = \frac{1 \times 28 \text{ kg}}{7} = 4 \text{ kg}$$

په دې ترتیب د محلول دروندوالی = د مالګې دروندوالی + د اوبو دروندوالی

$$= 4 \text{ کیلو ګرام} + 28 \text{ کیلو ګرامه} = 32 \text{ کیلو ګرامه}$$

8 مثال. د یو شرکت د x ، y او z سوداګرو د سهمونو نسبت چې 1200000

دالره سرمایه لری په ترتیب سره $\frac{1}{6}$ ، $\frac{2}{6}$ ، $\frac{3}{6}$ دی. ددې سوداګرو د هر یو د سهمونو اندازه معلومه کړئ.

حل

$$\frac{x}{\$1200000} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{1 \times \$1200000}{6} = \$200000$$

$$\frac{y}{\$1200000} = \frac{2}{6} \Rightarrow y = \frac{2 \times \$1200000}{6} = \$400000$$

$$\frac{z}{\$1200000} = \frac{3}{6} \Rightarrow z = \frac{3 \times \$1200000}{6} = \$600000$$

ذکات (ذکوت)

ذکات په نقدی شتمنی کې تر معینو شرایط لاندې د هغې خلویښتمه کیږي. بیا پردې د ذکات او پانګې تر منځ نسبت $\frac{1}{40}$ دی. لکه څرنګه چې د 5000000 افغانیو پانګې ذکات په لاندې ډول حسابیږي.

$$\frac{z}{5\,000\,000} = \frac{1}{40} \Rightarrow z = \frac{5\,000\,000 \times 1}{40} = 125\,000 \text{ Af}$$

پرله پسې (متمادي) نسبتونه (Continued Rations)

د معینو برخو په توګه د دوو څخه زیاتو کمیټونو مقایسه د هغوی د مجموعې په تناسب د متمادي نسبتونو په نامه یادوي. متمادي نسبتونه د مشارکت، سهم بندۍ، د میراث تقسیم، په ګډو مسایلو کې، د کیمیاوي مرکباتو په جوړونه او نورو کې طرحه کیږي. د مثال په توګه که اقبال $\$2000$ مسعود $\$5000$ او حمزه $\$7000$ په یو شرکت کې ولري. نو د هغوی متمادي نسبتونه عبارت دي له

$$\begin{array}{ccc} \text{اقبال} & \text{مسعود} & \text{حمزه} \\ 2 & : & 5 : 7 \end{array}$$

د خو کمیتونو د متمادي نسبتونو لپاره، مربوطه کمیتونه د دوی پر ټولو لوی مشترک قاسم باندې تقسیموو، په لاس راغلي خارجقسمتونه د نوموړو کمیتونو د متمادي نسبتونو څخه عبارت دی.

9 مثال. د 12، 15، 18، او 9 متمادي نسبتونه معلوم کړئ.

حل. د راکړل شویو کمیتونو د تقسیم څخه د هغوی په تر ټولو لوی مشترک قاسم یعنی 3 باندې غوښتل شوي متمادي نسبتونه په لاس راځي.

$$\begin{array}{ccccccc} 9 & : & 18 & : & 15 & : & 12 \\ 3 & : & 6 & : & 5 & : & 4 \end{array}$$

10 مثال. که چېرې $\frac{a}{b} = \frac{5}{6}$ او $\frac{b}{c} = \frac{3}{4}$ وی نو د a ، b او c متمادي نسبتونه معلوم کړئ.

حل. په دې مسئله کې د b کمیت په دوو نسبتونو کې شامل دی او غوښتل شوي نسبتونه په لاندې ډول په لاس راځي.

$$\left. \begin{array}{ccc} a & : & b & : & c \\ 5 & : & 6 & & \\ & & 3 & : & 4 \\ \hline 5 \times 3 & : & 6 \times 3 & : & 6 \times 4 \\ 15 & : & 18 & : & 24 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{ccc} a & : & b & : & c \\ 15 & : & 18 & : & 24 \\ 5 & : & 6 & : & 8 \end{array}$$

11 مثال. د میاشتي شعاع د لمر د شعاع $\frac{3}{11}$ ده او د ځمکې شعاع 180 ځلې نظر و لمر شعاع ته وره ده. نو د میاشتي او لمر د شعاع گانو نسبت معلوم کړئ.

حل. که د میاشتي شعاع m ، د ځمکې شعاع e او د لمر شعاع s وي. په هغه صورت کې

$$\left. \begin{array}{l} m : e : s \\ 3 : 11 \\ \frac{1}{3 \times 1} : \frac{1}{1 \times 11} : \frac{1}{11 \times 180} \\ 3 : 11 : 11 \times 180 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{m}{s} = \frac{3}{11 \times 180} = \frac{1}{660}$$

د مشارکت او په متمادي نسبتونو باندې ویش

د سهامی شرکتونو په شان مسائلو، بانگداري او نورو کې، لازم کیږي چې حسابي کمیټونه په څو برخو دا ډول ویشل شي چې ویشل شوي برخې د پخوانیو معینو کمیټونو (مربوطه سهمونه) سره تناسب ولري. د مثال په توګه که د x ، y او z کمیټونه د اصلي کمیټ (مجموعي کمیټ) $U = x + y + z$ څخه ناشی وي. د سهمونو د تقسیم څخه د هغوی پر ترټولو لوی مشترک قاسم باندې، د سمونو نسبتونه په لاس راځي. که چېرې دا نسبتونه په ترتیب سره x ، y او z وي، په دې صورت کې ددې نسبونو مجموعه $u = x + y + z$ ده نو د ویش لارښود دلاندې رابطو څخه منشا اخلي.

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = \frac{U}{u} = k$$

دلته k د سهمونو د مجموعې یوه برخه ده په دې اخیږه رابطه کې د نسبتونو هره جوړه یو تناسب جوړ وي، دا ډول چې له دې هر یو څلور کمیټونو نه د طرفینو او وسطینو د قاعدې په مرسته معلومیدی شي، په لاندې ډول.

$$\frac{X}{x} = \frac{U}{u} \Rightarrow X = \frac{U \times x}{u}, \quad \frac{Y}{y} = \frac{U}{u} \Rightarrow Y = \frac{U \times y}{u}$$

$$\frac{Z}{z} = \frac{U}{u} \Rightarrow Z = \frac{U \times z}{u}$$

12 مثال. د دریو کسانو برخې په یو شرکت کې \$300000، \$400000 و \$500000 دي. که چېرې ددې شرکت کټه \$3600000 وي. د هر یو کټه معلومه کړئ.

حل. د برخو (سهمونو) د تقسیم څخه د دوی په تر ټولو لوی مشترک قاسم یعنی 100000 باندې د هغوی نسبتونه په لاس راځي.

500000	400000	300000	سهام
5	4	3	د نسبتونو سهام

د نسبتونو مجموعه

که چېرې د شریکانو کټه په ترتیب سره a ، b او c وي په هغه صورت کې

$$a = \frac{\$3600000}{12} \times 3 = \$900000, \quad b = \frac{\$3600000}{12} \times 4 = \$1200000$$

$$c = \frac{\$3600000}{12} \times 5 = \$1500000$$

13 مثال. په يو تجارتي شرکت کې لومړی شریک \$200000 د پنځو میاشتو لپاره دوهم شریک \$300000 د 4 میاشتو لپاره او دریم شریک \$400000 د 2 میاشتو لپاره په دوران کې اچولي دي. که چېرې حاصل شوي ګټه \$1800000 وي. نو د هر یو شریک ګټه معلومه کړئ.

حل. دلته د پانګې برسيره د دوران موده هم حسابیږي بنا پر دې

شریکان	اول	دوم	سوم	مجموعه
(برخی) سهمونه	200000×5	300000×4	400000×2	3000000
(دبرخو سهمونه) دسهمونو نسبتونه	5	6	4	15
(دبرخو ګټه) د سهمونو ګټه	60000	72000	48000	180000

حسابونه: که چېرې شریکان په ترتیب سره a ، b و c او د سهمونو مفاد $s(a)$ ، $s(b)$ او $s(c)$ وي نو د سهمونو دتقسیم د دوی پر تر ټولو لوی مشترک قاسم باندې د (5، 6، 4) نسبتونه په لاس راځي. په نتیجه کې

$$u = 5 + 6 + 4 = 15 \Rightarrow S(a) = \frac{\$180000}{15} \times 5 = \$60\,000$$

$$S(b) = \frac{\$180000}{15} \times 6 = \$72000, \quad S(c) = \frac{\$180000}{15} \times 4 = \$48000$$

14 مثال. د 9000 عدد په 7 : 6 : 4 : 3 متناسبونه اجزاؤ (برخو) او تقسیم کړئ.

حل:

$$u = 3 + 4 + 6 + 7 = 20 \Rightarrow a = \frac{9000}{20} \times 3 = 1350, \quad b = \frac{9000}{20} \times 4 = 1800$$

$$c = \frac{9000}{20} \times 6 = 2700 \quad , \quad d = \frac{9000}{20} \times 7 = 3150$$

15 مثال. د \$3400 د \$a، b او c تر منځ دا ډول تقسیم کړی چې $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ او $\frac{b}{c} = \frac{3}{4}$ وی.

حل: لومړی باید د a، b او c کمیونه متمدی نسبتونه پیدا شي.

$$\left. \begin{array}{l} a : b : c \\ 1 : 2 \\ 3 : 4 \\ \hline 1 \times 3 : 2 \times 3 : 2 \times 4 \\ 3 : 6 : 8 \end{array} \right\} \Rightarrow a : b : c = 3 : 6 : 8$$

مشترکه پانگه = \$3400 او د برخو د نسبتونو مجموعه = 3+6+8 = 17

$$S(a) = \frac{3}{17} \times 3400 = \$600 \quad , \quad S(b) = \frac{6}{17} \times 3400 = \$1200$$

$$S(c) = \frac{8}{17} \times 3400 = \$1600$$

16 مثال. 225 افغانی د A، B، C او D تر منځ دا ډول تقسیم کړی چې

$$\frac{A}{B} = \frac{2}{3} \quad , \quad \frac{B}{C} = \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{C}{D} = \frac{3}{2}$$

حل د څلورو نفرو او دریو جوړو نسبتونو په حالت کې، لومړی د دریو نفرو تر منځ متمدی نسبتونه پیدا کوو او بیا د څلورم نفر متمدی نسبت د هغوی سره معلومېږي.

$$\left. \begin{array}{l} A : B : C \\ 2 : 3 \\ \hline 1 : 2 \\ 2 : 3 : 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A : B : C : D \\ 2 : 3 : 6 \\ \hline 3 : 2 \\ 2 \times 3 : 3 \times 3 : 3 \times 6 : 6 \times 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A : B : C : D \\ \Rightarrow 6 : 9 : 18 : 12 \\ 2 : 3 : 6 : 4 \end{array}$$

د پانګې مجموعه = 225 افغانی او د برخو د نسبتونو مجموعه
 $u = 2 + 3 + 6 + 4 = 15$ ده.

بنا پر دې

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{15} \times 225 = 30 \text{ Af} , & B &= \frac{3}{15} \times 225 = 45 \text{ Af} \\ C &= \frac{6}{15} \times 225 = 90 \text{ Af} , & D &= \frac{4}{15} \times 225 = 60 \text{ Af} \end{aligned}$$

میزان:

$$U = 33 + 45 + 90 + 60 = 225$$

د کمیتونو تحول (Variation)

مستقیم او غیر مستقیم تناسبونه

د x او y دوه متحول کمیتونه په یو ډول یا هر ډول سره اړیکې لرلې شي. د یو زیاتوالی او کموالی سره د بل زیاتوالی یا کموالی راځي. کیدلی شي یو تر بله په دوه ډوله اړیکو کې سره ولیدل شي.

لومړی مستقیم تناسب.

که چېرې د x متحول په زیاتیدو سره د y متحول هم زیات شي. ویل کېږي چې د x او y کمیتونه یو تر بله سره مستقیم متناسب دي. د مستقیم تناسب تر ټولو ساده رابطه

$$\frac{y}{x} = c \Leftrightarrow y = cx$$

په داسې حال کې چې C یو ثابت عدد دی. بنا پر دې د هغو دوو کمیتونو د تقسیم حاصل ثابت وي د کومو تر منځ چې مستقیم تناسب وجود ولري. وهل شوی فاصل او وخت، د جنسونو مقدارونه او د هغوی بېي، کار کوونکي او د هغوی مصارف، کار کوونکي او د هغوی د کار ورځې د هغو متحولینو مثالونه دي چې یو تر بله مستقیم تناسب لري.

17 مثال. که د یو قلم قیمت 5 افغانی وي نو د قلمونو د تعداد (x) او د هغوی د بېي (y) تر منځ مستقیم تناسب وجود لري په لاندې ډول

$$\begin{array}{l} x : 2p \quad 4p \quad 6p \quad 7p \quad 8p \quad 9p \quad 10p \\ y : 10Af \quad 20Af \quad 30Af \quad 35Af \quad 40Af \quad 45Af \quad 50Af \end{array}$$

لیدل کېږي چې

$$\frac{y}{x} = \frac{10Af}{2p} = \frac{20Af}{4p} = \frac{30Af}{6p} = \frac{35Af}{7p} = \frac{40Af}{8p} = \frac{45Af}{9p} = \frac{50A}{10p} = 5^{Af/p}$$

دویم معکوس تناسب.

که چېرې د x د متحول په زیاتیدو سره بالمقابل د y د متحول کم شي، ویل کېږي چې

د x او y کمیتونه یو تر بله معکوس متناسب دي (یو تر بله معکوس نسبت لري). تر ټولو ساده معکوسه رابطه عبارت ده له

$$x \times y = c \Leftrightarrow y = \frac{c}{x}$$

دلته هم c یو ثابت عدد دی. بنا پر دې همغه دوه کمېته چې یو تر بله سره معکوس تناسب ولري د هغوی د ضرب حاصل ثابت وي. د کارگرانو شمیر او دیو ثابت حجم کار، د کار موده، د متجانسو نلونو شمېر او په یو ثابت حجم سره د اوبو څخه د یو ډنډ د ډکولو د جریان موده د کتابونو شمېر او د هر یو د ډوډۍ اندازه، په داسې حال کې چې تیاره شوي ډوډۍ ثابتې وي. د هغو متحولینو جوړې دي چې یو تر بله سره معکوس تناسب لري.

18 مثال. که چېرې یو ډنډ په معین حجم سره یو جاری نل په 60 ساعتونو کې ډک کړي که د همغه نلونو شسپر (n) شي نو د ډنډ ډکولو موده (t) ته راتیښېږي. په لاندې ډول

$$\begin{array}{l} n : \quad 1 \quad 3 \quad 5 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \quad 20 \\ t : \quad 60h \quad 20h \quad 12h \quad 10h \quad 7,5h \quad 6h \quad 3h \end{array}$$

له دې ځایه

$$n \times t = 1 \times 60 = 3 \times 20 = 5 \times 12 = 6 \times 10 = 8 \times 7,5 = 10 \times 6 = 20 \times 3 = 60h$$

د معکوس والی تعبیر

د 5 او 12 کمیتونه د 6 او 10 سره معکوساً متناسب دي. یعنې

$$5 \times 12 = 6 \times 10$$

پورتنی رابطه دا ډول هم لیکلی شو.

$$\frac{5}{\frac{1}{12}} = \frac{6}{\frac{1}{10}}$$

لیدل کیږي چې 5 او $\frac{1}{12}$ عددونه د 6 او $\frac{1}{10}$ عددونو سره مستقیمه رابطه لري. همدا رنگه

$$5 \times 12 = 6 \times 10 \Leftrightarrow \frac{5}{6} = \frac{10}{12}$$

بنا پر دې، ددې لپاره چې a او b د x او y سره معکوساً متناسب وي، لازمه او کافي ده چې a او x د دوو کمیتونو y او b سره معکوس نسبت ولري. یعنې

$$a \times b = x \times y \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{y}{b}$$

په بل عبارت د مستقیم تناسب طرفین د هغی د وسطینو سره معکوس نسبت لري.

19 مثال. که چېرې 4 په اوبو جاری نلونه یو ډنډ په 15 دقیقو کې ډک کړی، نو دولس نله به هغه ډنډ په څو ساعتونو کې ډکوي.

حل: که چېرې مطلوب وخت x وي. نو ددې په نظر کې نیولو سره چې د نلونو تعداد او د اوبو د جریان وخت سره معکوس نسبت لري نو

$$12 \times x = 4 \times 15 \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{4}{12} \Rightarrow x = \frac{4 \times 15}{12} = 5h$$

اویا

$$\frac{4}{\frac{1}{15}} = \frac{12}{\frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{12 \times \frac{1}{15}}{4} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{\frac{4}{5}}{4} \Rightarrow x = \frac{1 \times 4}{\frac{4}{5}} = 4 \times \frac{5}{4} = 5h$$

20 مثال یو موټر چې سرعت یې په یو ساعت کې 30 کیلومتره دی. د دوو شهورنو تر منځ فاصله په 20 ساعتونو کې تماموي. که چېرې د دې موټر سرعت 40 کیلومتره په ساعت کې شي نو نوموړی فاصله به په څو ساعتونو کې ووهي. حل:

$$40 \times x = 30 \times 20 \Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{30}{40} \Rightarrow x = \frac{20 \times 30}{40} = 15h$$

احدیت (Unitary)

په تجارتي معاملو او حسابي ډول ډول مسایلو کې، د یو واحد د بېي د معلومولو او یا د یو مشخص معیار نرخ ته ضرورت پېښېږي. د مثال په توګه که د 20 کیلوګرامه غواړو بیه، 500 افغ وي نو د یو کیلو ګرام غواړو د بېي پوهول مطلوب دي؟ یا څو نفره به هغه کار په یوه ورځ کې تمام کړي؟

دا هر یو طرحه شوی سوال د احدیت مربوط دی. اګر چې دا ډول مسایل د مسقیم یا معکوس تناسب خصوصي حالات دي. مګر په محاسبوي مسایلو کې په نسبت باندې تقسیم، تناسب، ربح، د محاسبې لومړنی مرحله ده.

21 مثال. که چېرې د 50 مایلونو بیه 75000 افغانی وي نو د 10 مایلونو قیمت به څو وي؟

حل: دلته تر ټولو لومړی باید د یو مایل $p(1m)$ بیه معلومه شي.

$$p(1m) = \frac{75\,000\text{Af}}{50} = 1\,500\text{Af}$$

بنا پر دې د 10 مایلونو بیه عبارت دی له

$$p(10m) = (1500\text{Af}) \times 10 = 15\,000\text{Af}$$

22 مثال. 10 جاري نلونو يو ډنډ په 12 ساعتونو کې ډکوي.

الف. يو نل به نوموړی ډنډ په څو ساعتونو کې ډکوي.

ب. څو نلونو به هغه ډنډ په دوو ساعت کې ډک کړي. حل: که د هغه شمیر ساعتونه چې په هغې کې يو جاري نل نوموړی ډنډ ډک کړای شي په H او د هغو نلونو شمیر چې نوموړی ډنډ په يو ساعت کې ډک کړي په N سره ونیسو په هغه صورت کې لرو چې

$$H = 10 \times 12h = 120h, \quad N = 12 \times 10n = 120n$$

23 مثال. يو جاري نل په يوه ورځ کې د يو ډنډ لسمه برخه ډکوي. همغه يو ډنډ ډکولوته په يوه ورځ کې څو نلونو په کار دي؟

$$N = 1 \div \frac{1}{10} = 1 \times \frac{10}{1} = 10n$$

د کمیتونو اوسط

د څو عددونو حسابي اوسط د هغوی پر شمېر باندې د همغه عددونو د مجموعې خارج قسمت دی. د مثال په توګه د 44، 56، 51، 49، 101 او 50 عددونو حسابي اوسط عبارت دی له

$$a = \frac{44 + 56 + 51 + 49 + 100 + 50}{5} = \frac{350}{5} = 70$$

د حسابي اوسط د اصطلاح پر ځای ډیر ځلې د عددونو اوسط هم ویل کېږي. مګر د دوو عددونو a او b لپاره درې ډوله اوسط حسابي، هندسي او هارمونيک په لاندې ډول تعریف کېږي.

$$A = \frac{a+b}{2} \quad \text{حسابي اوسط :}$$

$$G = \sqrt{a \times b} \quad \text{هندسي اوسط :}$$

$$H = \frac{2ab}{a+b} \quad \text{هارمونیک اوسط:}$$

24 مثال. د 2 او 8 عددونو حسابي، هندسي، او هارمونیک اوسطونه عبارت دي له

$$A = \frac{2+8}{2} = 5, \quad G = \sqrt{2 \cdot 8} = 4, \quad H = \frac{2(2 \cdot 8)}{2+8} = 3,2$$

تمرین

د لاندې هر یو دوه کوني کمیتونو تر منځ نسبت معلوم کړئ؟

1. 20, 4, 2. 7, 8, 3. 27, 36
4. 35, 15, 5. $5\frac{5}{8}$, $7\frac{1}{2}$, 6. 2,5, 7,5

په لاندې تناسبونو کې مجهول عددونه معلوم کړئ؟

7. $\frac{16}{8} = \frac{c}{5}$, 8. $\frac{25}{15} = \frac{10}{d}$, 9. $\frac{13}{b} = \frac{39}{96}$
10. $a:25 = 6:50$, 11. $1:2 = 3:d$, 12. $3:8 = c:19$

13. د اوبو د سنجولو په یو میتر کې د یو نل د اوبو ثابت جریان په 30 ورځو کې 450 مکعب متره ثبت شوی دی. که چیرې همدا نل 210 ورځې جاري وي نو میتر به څو مکعب متره جاری اوبه ثبت کړي.

14. که چېرې د 900000 افغانۍ شتمني مالیه 19800 افغانۍ حساب شي نو د 105000 افغانیو مالیه به څو وي؟

15. د جوړونې یو انجینیر یو تعمیراتي مصالحه، سمت، جغله او شگه په 1:3:6 تناسب سره ګډوي. نو په 2500 ټنه مصالحې کې به دهر یو څخه څو ټنه مصالحه ګډه شوي وي.

16. په یوه تجارتي معامله کې څلوورو شریکانو سوداګرو \$75840 ګټه په لاس راوړي ده. که چېرې د دې سوداګرو اول سوداګر، دوم سوداګر، دریم سوداګر او

خلوورم سوداگر د برخو تناسب په ترتیب سره
 $8:9:19:24$ وي. نوموړی ګټه د دوی تر منځ وویشئ.

17. یو پایپ 2010 لیتره اوبه د 1,5 ساعتونو په وخت کې یو ټانګر ته تویوي، نو 42230 لیتره اوبه به نوموړی پایپ په څو ساعتونو کې هغې ټانګر ته داخلي کړی؟
 18. یو څرخ چې ۴ انچه قطر لري په یوه دقیقه کې ۲۲۵۰ ځلې څرخېږي، په همدې سرعت به یو بل څرخ چې قطر یې ۵ انچه وي په یوه دقیقه کې څو ځلې وڅرخېږي؟

19. که چېرې 20 نفره د 19 ورځو کار په کولو سره $6080\$$ مزدوري واخلي، نو د ۳۳ کسانو د 7 ورځو مزدوري څومره کیږي؟
 20. که چېرې په یو بانک کې د $3850\$$ پانګې دوه کلنه ګټه $231\$$ وي، نو د $23100\$$ د 11 کالو ګټه به څو وي؟

21. که په یو هوټل کې د 1500 میلانودرې وخته ډوډی مصرف د 8 ورځو لپاره $16800\$$ شي نو د 3200 کسانو د دوه وخته ډوډی مصرف به څو ډالره وي؟

22. که چېرې د یو مثلث محیط $52cm$ وي او a ، b ، c د هغې ضلعې وي، داسې چې $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$ او $\frac{b}{c} = \frac{5}{4}$. نو په دې حالت کې ددې مثلث د هرې ضلعې اړدوالی معلوم کړئ؟

23. 45000 افغانی د مسعود (M)، اقبال (I)، او حمزه (H) تر منځ داسې وویشئ چې $\frac{M}{I} = \frac{2}{3}$ ، $\frac{I}{H} = \frac{3}{5}$ وي.

24. د 100، 200، 300، 400 او 500 عددونو اوسط معلوم کړئ.

25. د 4 او 25 عددونو حسابي اوسط، هندسي اوسط، او هارمونیک اوسط حساب کړئ.

26. که چېرې محمود 25000 افغانی، مسعود 15000 افغانی، منصور 40000 افغانی، اقبال 80000 افغانی او حامد 100000 افغانی ولري د دوی د شتمنی اوسط څو دی؟

فیصد (Percent)

د فیصد (په صلو کی) اصطلاح د % سمبول په وسیله افاده کیږي د یو واحد عدد سلمه برخه ده. د مثال په توګه 25% مساوي دي په $\frac{25}{100}$ یا 0.25 یا $\frac{1}{4}$ دی. د فیصد کمیت د یو کسر (نسبت) خاص حالت دی داسې چې د هغې مخرج 100 وي.

د فیصد اړونه په عامو او اعشاري کسرونو باندې

د فیصد اړونې لپاره په عام کسر باندې، د فیصد عدد د کسر په توګه په صورت کې او د 100 عدد په مخرج کې لیکل کیږي وروسته که بیا لازم وو نو کسر اختصار او تصحیح کیږي.

$$8\% = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}, \quad 240\% = \frac{240}{100} = 2\frac{40}{100} = 2\frac{2}{5}, \quad 95\% = \frac{95}{100} = \frac{19}{20}$$

په فیصد باندې د عامو او اعشاري کسرونو اړونه.

په فیصد باندې د یو اعشاری کسر په اړونه کې د اعشاری علامې ځای دوه رقمونه بنی خواته خوځول کیږي او بیا د فیصد سمبول پرې علاوه کیږي. لکه

$$0,09 = 9\%, \quad 0,85 = 85\%, \quad 6 = 6,00 = 600\%, \quad 1,2 = 1,20 = 120\%$$

په فیصد باندې د عام کسر د اړونې لپاره — لومړی هغه په اعشاري کسر اړوو او بیا په فیصد اړوو لکه

$$\frac{1}{2} = 0,5 = 0,50 = 50\% \quad , \quad 2\frac{1}{4} = 2,25 = 225\% \quad , \quad \frac{3}{20} = 0,15 = 15\%$$

د فیصد اساسی کمیتونه

د فیصد په اړوند حسابونه کې درې اساسی کمیتونه مطرح کېږي.

اول. اساس (*base*) له هغې عدد څخه عبارت دی چې له هغې څخه فیصد منشا اخلي. دا کمیت ته اصلي کمیت یا سرمایه هم ویل کېږي. د مثال په توګه که چېرې د یوې ښوونځۍ د 400 شاګردانو څخه 20 کسان ناکام شوي وي نو واضح ده چې د مکتب ناکامان 5% دي. دلته 400 اصلي کمیت دی.

دوم. فیصدی (*percentage*) - هغه کمیت دی چې د هغې نسبت د اصلي کمیت سره د فیصد په حیث افاده کېږي. فیصدی ته فرعي کمیت یا نفع (نقص هم وائی). په پورتنۍ مثال کې د 20 عدد فرعي کمیت دی.

دریم. نرخ (*rate*) د فیصد او اصلي کمیت تر منځ نسبت دی چې د فیصد یا عام کسر او یا هم اعشاري کسر په توګه اړانه کېږي. په پورتنۍ مثال کې 5% نرخ دی. فیصدی کمیتونه او اصلي کمیتونه په هر حالت کې سره هم جنس وي. په داسې حال کې چې د دوی تر منځ نسبت (نرخ) یو مجرد عدد دی.

1 مثال. که چېرې د سوداګیرۍ په یوه معامله کې له \$1 000 000 سره ماتي څخه \$100 000 ګټه حاصله شوي وي، دلته \$1 000 000 اساس (سرمایه) \$100 000 فیصد (ګټه) او 10% نرخ (فیصدی) دي.

د فیصدی د کمیتونو معلومول

د فیصد په اړونده مسایلو کې څلور کمیتونه: اصلی کمیت (b) فیصدی (p) نرخ

(r) او 100 یو تناسب $\frac{p}{b} = \frac{r}{100}$ جوړوي. چې د طرفینو او وسطینو خاصیتونو

ته په پاملرنه سره دا هر یو کمیت د یو بل له جنسه په لاس راتلی شي. یعنې

$$\frac{p}{b} = \frac{r}{100} \Rightarrow p = \frac{b \times r}{100}, \quad b = \frac{p \times 100}{r}, \quad r = \frac{p \times 100}{b}$$

او یا د ښي نه چپ خواته

اصلی کمیت = (فیصدی $\times 100$) $\div$ نرخ

فیصدی = (اصلی کمیت $\times$ نرخ) $\div 100$

نرخ = (فیصدی $\times 100$) $\div$ کمیت اصلی

2 مثال. که چېرې د ډوډی مالګې په یو کیلو ګرام محلول کې 250 ګرامه خالصه

مالګه منحل شوي وي، نوموړی محلول څو فیصده دی؟

حل:

$$\frac{250g}{1000g} = \frac{r}{100} \Rightarrow r = \frac{250 \times 100}{1000} = 25\%$$

نو محلول 25 فیصده دی.

3 مثال. که چېرې د یو شهر نفوس 2000000 نفره وي او په یو کال کې 5%

زیاتوالی پیدا کړي نو یو کال وروسته به د همغه شهر نفوس څومره وي.

حل:

$$\frac{p}{2\,000\,000} = \frac{5}{100} \Rightarrow p = \frac{2\,000\,000 \times 5}{100} = 100\,000$$

په دې ترتيب د شهر نفوس د يو كال په موده كې 100 000 نفر زيات شوى او مجموعي نفوس يې 1100 000 نفره دى.

4 مثال . په يو شهر كې د اوبو د ذخيرې تانكي په يو ساعت كې % 4,2 فيصده تخليه كيږي . كه چېرې د شهر مصارف په يو ساعت كې $840\,000\text{ m}^3$ برابره شوى وي. ددې ذخيرې ظرفيت معلوم كړئ؟
حل :

$$\frac{840\,000\text{ m}^3}{b} = \frac{4,2}{100} \Rightarrow b = \frac{(840\,000\text{ m}^3) \times 100}{4,2} = 20\,000\,000\text{ m}^3$$

بنا پر دې دا ذخيره شل ميلیون متر مکعب ظرفيت لري.

ذکات او فیصد

لكه څرنګه چې پوهیږو. ذکات په يو سرمايه كې څلوېښتمه (په هر څلوېښتو افغانیو كې يوه افغانی) حسابيږي.

بنا پر دې په فیصد كې د ذکات اندازه دا ډول معلومیږي.

$$\frac{r}{100} = \frac{1}{40} \Rightarrow r = \frac{100 \times 1}{40} = \frac{100}{40} = 2,5\%$$

نو د شتمنیو د ذکات اندازه % 2,5 حسابيږي.

5 مثال. د 5 000 000 افغ شتمنی ذکات څومره كيږي؟
حل.

$$\frac{z}{5\,000\,000} = \frac{2,5}{100} \Rightarrow z = \frac{(5\,000\,000) \times (2,5)}{100} = \frac{12\,500\,000}{100} = 125\,000\text{ Af}$$

تخفیف (Discount)

په سوداګیرۍ كې، د مشتریانو بیلولو او جنسونو د خرڅلاو د اسانتیا لپاره، ځینی وختونه اړونده کالي له اصلی قیمت څخه څو فیصده ارزان خرڅیږي. ددغه

سوداگیری کالو د اصلی بیې د ټیټوالی فیصدی د تخفیف په نامه یادېږي. په ساده حالاتو کې د تخفیف د مسایلو حل د فیصد موضوع ته راجع کیږي.

6 مثال. د یو کالا شوئی ماشین معین قیمت \$275 دی، که چیرې د هغې په خرڅلاو کې 40% تخفیف په نظر کې ونیول شي نو د خرڅلاو بیه به یې څو وي؟

حل: که چیرې د تخفیف اندازه x او د خرڅلاو بیه p فرض شي. نو

$$\frac{x}{275} = \frac{40}{100} \Rightarrow x = \frac{275 \times 40}{100} = \$110$$

$$\Rightarrow p = 275\$ - 110\$ = 165\$$$

بیمه (Insurance)

بیمه د هغو قرار دادونو څخه دی چې اشخاص یا موسسات، د ژوندانه د کارونو خطرات د مناسبو وجوهاتو په تادیه کولو سره، وقایه کوي، د بیمې د قرار داد دواړه خواوې د بیمه کوونکو شرکت او بیمه کیدونکی لوري څخه جوړېږي. بیمه شوی طرف د بیمې د شرکت سره قرار داد کوي چې که د مثال په توګه تر پنځو راتلونکو کالونو پورې دده کور وسوزي باید 200 000 افغانۍ ده ته ورکړل شي. د هغې په مقابل کې دی د کال 0,2% د بیمې حق (premium) شرکت ته ووکوي. بیمه او داسې نور د بیمې د حق محاسبه د فیصد په مسائل پورې تړلی دي.

7 مثال. یو سړی خپل کور دارنګه بیمه کوي چې که وسوزی نو 1 000 000 افغ به ده ته ورکول کیږي او دهغې په مقابل کې د کال 0,1% وجه د بیمې حق ادا کوي. نو دا سړی باید څومره افغانۍ په کال کې د بیمې شرکت ته ورکړي؟

حل: د یو کال د بیمې حق عبارت دی له

$$p = \frac{b \times r}{100} \Rightarrow p = \frac{(0.1) \times (1\,000\,000)}{100} = 1000 \text{ Af}$$

8 مثال. یو سپری خپل ژوند په 5 000 000 افغانیو د یو کال لپاره د 0.2% د ورکولو په مقابل کې بیمه کوي. که چېرې 20 کاله وروسته مړ شي نو خومره د بیمې حق به یې ورکړی وي او د میراث خور پاتې شوني یې خومره ده.

$$P(20) = \frac{(0.2) \times (5\,000\,000) \times (20)}{100} = 100\,000 \text{ Af}$$

او د میراث خور پاتې شوني

$$p = 5\,000\,000 - 100\,000 = 4\,900\,000 \text{ Af}$$

ساده ربح (Simple Intrest)

ربح د هغو پولې زیرمو فیصدي ګټه ده چې په بانکونو یا د سوداګرۍ په مرکزونو کې د معلومو وختونو لپاره د امانت په توګه اېښودل کېږي. ددې سره سره چې ربح د فیصدۍ سره اړیکې لري، نو د فیصد د دریو کمیټونو برسیره څلورم کمیټ وخت ته هم ضرورت لري.

که چېرې اصلي کمیټ (سرمایه) b ، فیصدۍ کمیټ (دوخت معلوم دور p)، نرخ – r او وقت t فرض شي، نو د t وخت د تیروولو وروسته ګټه $I = tp$ کېږي.

$$\frac{p}{b} = \frac{r}{100} \Rightarrow \frac{p \times t}{b} = \frac{r \times t}{100} \Rightarrow \frac{I}{b} = \frac{r \times t}{100}$$

$\Rightarrow I = \frac{b \times r \times t}{100}, \quad b = \frac{I \times 100}{r \times t}, \quad r = \frac{I \times 100}{b \times t}, \quad t = \frac{I \times 100}{b \times r}$
--

9 مثال. د \$750 ساده ربح چې نرخ یې 4% و د $\frac{1}{2}$ کال لپاره ونښئ.
حل:

$$b = \$750, \quad r = 4\%, \quad t = \frac{1}{2} = 0,5y \Rightarrow I = \frac{750 \times 4 \times 0,5}{100} = \$15$$

نو د پیسو مجموعه

$$S = p + I = 750 + 15 = \$765$$

تنزیل (Depreciation)

تنزیل د فزیکي موادو (لکه تعمیرونو، ماشینونو او نورو) د استعمال په وجه د بیو ټیټوالی دی. په معموله توګه ماشیني سامانونه د استهلاک معینه دوره وخت لري. دهغوی بیه د وخت دور په تیریدو څو فیصده ټیټیږي او د په کار وړل شویو سامانونو بیه د اصلی بیې په نسبت کمه وي.

یا د سوداګیری په محاسبو کې ممکنه ده اخیستونکي خپل پوره وړي ته یو سند ورکړی چې په هغې کې به پیسې د یو معین وخت څخه وروسته ورکوي. که چېرې د سند څښتن پیسو ته اړوي نو د بانک څخه د سند له مخی پیسې اخلي.

په دې شرط چې د معاملې د تاریخ څخه او د سند له وجې څخه یې کمه کړي، هغه پاته شوي پیسې چې د سند څښتن یې اخلي د سند (حوالې) فعلی قیمت دی که د سند (حوالې) له اصلی قیمت څخه کم شي نو دغه حاصل تنزیل نومېږي.

تنزیل د ربح سره شباهت لري په دی توپیر سره چې په ربح کې پانګه زیاتېږي، په داسې حال کې چې په تنزیل کې اصلی وجه کمیږي.

د تنزیل او ربح فورمولونه یو دي. د ربح (I) په ځای د تنزیل کمیت (d) په فورمول کې په نظر کې نیول کېږي.

$$\Rightarrow d = \frac{b \times r \times t}{100}, \quad b = \frac{d \times 100}{r \times t}, \quad r = \frac{d \times 100}{b \times t}, \quad t = \frac{d \times 100}{b \times r}$$

10 مثال. د یو ماشین بیه \$4000 او د زړښت دورې 6 کاله دی. د معین وخت د بشپړکیدو وروسته د ماشین بیه \$400 ته کمیږي. نو د ماشین کالنی تنزیل څو فیصده دی؟
حل: لیدل کیږي چې

$$b = 4000\$ \quad , \quad t = 6 \text{ year} \quad , \quad d = 4000 - 400 = \$3600$$

$$\Rightarrow r = \frac{d \times 100}{b \times t} = \frac{3600 \times 100}{4000 \times 6} = 15\%$$

مرکبه ربح (Compound Intrest)

په دې ډول ربح کې د معین وخت د هرې دورې په اخر کې ګټه پر سرمایه ورزیاتېږي، نو په بله دوره کې د نوي سرمایې ګټه هم حسابیږي. دا عملیه د وخت په څو دورو کې دوام پیدا کوي.
که چېرې اولنۍ پانګه p د یوې دورې ګټه i ، دوخت د دورو تعداد n او د n دورو د زیاتوالي څخه وروسته پانګه S وي نو ددې کمیتونو تر منځ اړیکې عبارت دي له:

$$S = P(1+i)^n \Leftrightarrow P = \frac{S}{(1+i)^n}$$

ددې سره سره چې وروستنۍ رابطې په مرکبه ربح پورې اړه لري، مګر د هغې څخه د طبیعي حادثو په مربوطه حسابونو کې لکه د نفوسو زیاتوالی، د میکروبونو زیاتوالی، د سرطانې غدو رشد او داسې نورو کې ورڅخه ګټه اخیستل کیږي.

11 مثال. 2 000 000 پانګه په 10% ربح باندې په بانک کې ایښودل کیږي. نو پنځه کاله وروسته به د هغوی سرمایه څومره شي؟
حل:

$$P = 2\,000\,000Af, \quad i = 10\% = \frac{10}{100} = 0,1, \quad n = 5 \text{ year}$$

$$S = 2000000(1+0,1)^5 = 2000000(1,1)^5 = 20000000 \times 1,61051 = 20161052Af$$

12 مثال. که چېرې د افغانستان نفوس څلوېښت کاله دمخه 15 ملیونه احصایه اخیستل شوي وي. فرض کړو چې د ملک جمعیت د کال 2% زیاتوالی کوي. نو ددی ملک نفوس به څو وی؟

حل:

$$p = 15000000, \quad r = 2\% = \frac{2}{100} = 0.02$$

$$S = p(1+r)^{40} = 15000000 (1+0.02)^{40} \approx 33000000.$$

تمرین

دا لاندې هره یوه فیصدی عامو او اعشاري کسرونو په توګه اړانه کړئ؟

$$1. \quad 6\frac{1}{4}\%, \quad 2. \quad 40\%, \quad 3. \quad \frac{5}{15}\%, \quad 4. \quad 16,25\%, \quad 5. \quad 25\%$$

دا لاندې هر یو عدد د فیصد په توګه اړانه کړئ

$$6. \quad 0.45, \quad 7. \quad 0,125, \quad 8. \quad 0,00875, \quad 9. \quad \frac{11}{5}, \quad 10. \quad \frac{43}{200}$$

لاندې فیصدی حساب کړئ.

11. د 72 دیرش فیصده، **12.** د اویاوو زرو، څلووشت او نیم فیصده

13. د اتو، شل فیصده، **14.** د 7 پنځوس فیصده

په لاندې سوالونو نامعلوم کمیتونه معلوم کړئ؟

د سوال شماره	اصلي كميت (اساس)	فرعي كميت (فيصدي)	فيصدي نرخ
11	72	x	30%
12	\$350	x	$12\frac{1}{2}\%$
13	\$300	x	3,75%
14	250	50	x
15	310	93	x
16	900	80	x
17	x	45	30%
18	x	4	80%
19	x	735	$\frac{7}{8}$
20	x	89	$2\frac{1}{2}\%$

21. د يو ست تيلويزيون چې \$640 بيه لري په $14\frac{2}{7}\%$ تخفيف سره خرڅېږي، نو د خرڅلا بيه به څو وي؟

22. په يو بانک کې د \$750 څلورمياشتنۍ ګټه کوم چې د کال په 6% ګټه ورکړل شوي ده پيدا کړي.

23. ديو سړي کالني معاش \$9500 دی، که چېرې له هغې څخه 20% د کور کرایه، 25% د ډوډۍ مصرف، 10% کالي، 5% دوايي، 2% روغتيايي بيمه، 9% د سوند موادو مصرف، 19% کډوډ مصرف او پاتې شوی معاش پس انداز کړي. نو د نوموړي کالني پس انداز حساب کړي؟

24. يو محلول د 800 ګرامه مالګې، 1500 ګرامه سوديم کاربونات او 700 ګرامه د نقرې کلورايدو څخه جوړ شوی وي. نو له دې موادو څخه د هر يو اندازه په دې محلول کې په ګوته کړي؟

25. د يو نانوايي مشتریان د ورځې په اوږدو کې له 35 کسانو څخه 64 کسانو ته زياتوالی کړېدی. معلوم کړئ چې د نانوايي مشتریان څو فيصده زيات شويدي؟

26. مخکښی له دې چې د یو جنس تجارتي ارزش $3\frac{2}{5}\%$ زیات شي، قیمت یې $\$98230$ وو. نو ددی جنس قیمت د زیاتوالي څخه وروسته معلوم کړئ؟
27. یو علاف 1500 منه غله، یو من په 97.9 افغ خرڅه کړه. که چېرې د هغې د وړولو کرایه 9390 افغ، د اینودلو او جوړه ئی 2015 افغ او کمیشن ئې $3\frac{1}{2}\%$ وي. نو دغلي له درکه خالص عاید څو دی؟
28. د 15000 افغانیو ربح د کال په 4% د دوو کالو لپاره معلومه کړئ؟
29. د 24000 افغ ربح د کال په 3% د یو کال دوه میاشتو او پنځلسو ورځو څو کیږي؟
30. کومه پانگه د کال په 4% کټه په اتو میاشتو کې 2000 افغ کیږي؟
31. د ربح په کوم نرخ د 18000 افغ کټه په 3 میاشتو او لسو ورځو کې 400 افغ کیږي؟
32. په شومره وخت کې د 5000 افغانیو ربح د 5% له قراره 2500 کیږي؟
33. هغه حواله چې 72 ورځې یې وعدې ته پاتې دي او تنزیل یې د 5% له قراره کم کړئ دی. څښتن ته یې 1485 افغ تادیه کیږي، نو د حوالې اصلي قیمت به څو وي؟
34. د یوې حوالې اوسنی بیه د 4% تنزیل د وضع کولو څخه وروسته 1711,4 افغانی کیږي که چېرې د هغې اصلي قیمت 1720 افغ وي نو د تنزیل موده مطلوب دی؟

څلورم څپرکی

الجبري افادې (Algebraic Expressions)

يو فرضي کميټ چې له عددونو، ضريبونو او حرفونو (متحولينو) څخه د جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، او جذر په وسیله ترکیب شوی وي، د الجبري افادې څخه عبارت دی. د مثال په توګه

$$3x^2 - 5xy + 2y^3 \quad \dots \quad (I) , \quad 25a^2bc^3 \quad \dots \quad (II)$$

$$\frac{5xy + 3z}{2a^3 - c^2} \quad \dots \quad (III) , \quad \frac{a + b - c^2}{\sqrt{x^2 + 4yz}} \quad \dots \quad (IV)$$

حد (Term)

د یوې الجبري افادې هغه برخه چې په هغې کې عددونه او حرفونه د جمع یا تفریق په وسیله یو تر بله نه وي سره جلا شوي د هغې افادې یو حد بلل کېږي. د مثال په توګه

$$ab \text{ او } \frac{xy}{\sqrt[3]{abc}}, 64x^2yz$$

یو حده افادې (Monomial)

هغه افاده چې یوازې له یو حد نه جوړه شوي وي د یو حده په نوم یادېږي. د مثال په

$$\text{توګه } 2a^2b^3c^4, \text{ یو حده افادې دي.}$$

۷ څپر

دوه حده افادې (Binomial)

هغه افادې چې یوازې دوه حده ولري، ددو حده په نوم یادېږي. د مثال په توګه

$$a + b, 5xy - 8z^4 \text{ او } axy + \frac{12}{\sqrt{xy}} \text{ او داسې نور}$$

درې حده افادې (Trinomial)

هغه افادې چې د دریو حدونو څخه لاس ته راغلي وي، د درې حده په نوم یادېږي. د

$$\text{مثال په توګه } x^2 - \frac{xy}{z} + \sqrt{3a} \text{ ، } 4x^2 + 5xy^2 - 78xyz \text{ او } a + b - c .$$

څو حده افادې (Multinomial)

هغه افادې چې له یو حد څخه زیات حدونه ولری د څو حده افادو په نوم یادېږي.

$$\text{لکه } 7x + 6y \text{ ، } 3x^2 + 5xy^2 - 7xyz \text{ او } a + b + c$$

ضریب (Coefficient)

په یوه الجبري افاده کې د یو حد هر فکتور د عددونو ضریب او د هغې حد د حرفونه ضریب وي. مثلاً د $-5xy^2$ په حد کې $5x$ د y^2 او y^2 د $5x$ ضریب او 5 د xy^2 ضریب دی.

عددي ضریب (Numerical coefficient)

که چېرې یو حد له عددونو او حرفونو څخه جوړ شوی وي نو هغه عدد، د عددي ضریب په نامه یادېږي. مثلاً د $-5xy$ په حد کې د -5 عدد د همدې حد عددي ضریب دی.

مشابه حدوده

هغه الجبري حدوده چې عین حرفونه او عین توانونه ولري ضریبونه یې سره مختلف وي، یو تر بله سره مشابه یا هم جنس حدوده بلل کېږي. د مثال په توګه $6xy^3z^2$ ، $3xy^3z^2$ او $-18xy^3z^2$ مشابه حدوده دي.

متحول (Variable)

په الجبري افادې کې هغه حرفونه چې د عددونو په غیر خالي سیتونو کې قیمتونه اخیستی شي متحولین نومېږي. مثلاً د $5x^2 - \sqrt{y}$ په افاده کې x او y متحولین دی ځکه دلته x هر حقیقي عدد او y د صفر په شمول مثبت حقیقي عددونه،

قیمت اخیستلی شي، په ځینو افادو کې بیا حرفونه د ثابتو عددونو او یا د عددي ضریبونو په توګه فرض کیدلای شي. د مثال په توګه د $ax^2 + bx + c$ په افاده کې a ، b او c متحولین نه بلکه ثوابت په نظر کې نیول کېږي.

د الجبري افادو ډولونه

الجبري افادې په عمومي توګه په درې ډوله دي، پولینومونه، ناطقې افادې او غیر ناطقې افادې.

پولینومونه

هغه الجبري افادې چې په هغې کې د متحولینو توانونه تام مثبت عددونه یا صفر وي، پولینوم بلل کېږي، هغه پولینومونه چې یوازې یو متحول ولري زیات استعمال لري.

1 مثال.

$$(i) \quad P(x) = 3x^5 - 8x^3 + 9 + 5x - 4x^2$$

$$(ii) \quad Q(x, y) = x^3 - 2x^2y^4 + y^2$$

$$(iii) \quad R(x) = x^3 + x^2 - x + 1$$

د یو پولینوم د یو حد درجه

د یو پولینوم په یو حد کې د یو حرف (متحول) تر ټولو لوړ طبعي اویا صفری توان ، نظرو هغې متحول ته د دې حد درجه ویل کېږي. په یو حد کې د ټولو حرفونو د توانونو مجموعې ته د همغه حد درجه وايي. د مثال په توګه د $Q(x, y)$ په پولینوم کې د $-2x^2y^4$ درجه نظر x ته 2 نظر y ته 4 او په عمومي توګه ددې حد درجه 6 دی.

د پولینوم درجه

په یو پولینوم کې د هغه حد درجه چې د نورو حدونو تر درجو لوړه وي د پولینوم د درجې په نوم یادېږي په دې ترتیب سره د پولینوم درجه هم نظر یو متحول او یا نظر ټولو متحولینو ته تعریف کېږي.

په پورتنی مثال کې د $P(x)$ پولینوم درجه 5 د $Q(x, y)$ پولینوم درجه نظر x ته 3، نظر y ته 4 او نظر دواړه متحولینو x او y ته (په عمومی توګه) 6 ده. په داسې حال کې چې د $R(x)$ درجه 3 ده. د صفر عدد ته صفری پولینوم، ثابت عدد ته د صفر درجی پولینوم، او له درجه پولینوم ته خطی پولینوم وایي. او که د پولینوم، درجه 2 وي نو دوهمه درجه پولینوم او همدا رنگه دریمه درجه پولینوم بلل کېږي.

دوه متحوله پولینوم

دوه متحوله پولینوم هغه پولینوم دی چې په هغې کې $ax^m y^n$ ډوله حدونه موجود وي. دلته m او n تام مثبت عددونه او یا صفر دي، $a \neq 0$. د یو دوه متحوله پولینوم درجه د $m + n$ په قیمتونو کې د لوړ قیمت څخه عبارت دی.

2 مثال.

$$(i) \quad P(x, y) = x^3 y^2 - 8x^3 y - 8x + 9$$

$$(ii) \quad Q(x, y) = x - 2xy + y^2$$

$$(iii) \quad R(x, y) = 5x^3 - 3x^2 y - 4xy^2 + 1$$

دلته $P(x, y)$ درجه 5 د $Q(x)$ درجه 2 او د $R(x)$ درجه 3 ده.

د یو متحوله پولینوم ترتیب

یو پولینوم کیدلای شي دا ډول مرتب شي چې د حدونه توانونه یې د چپ څخه وېشي خواته ډیرېږي (صعود کوي) یا کمیږي (نزول کوي). لومړی حالت ته صعودی ترتیب او دویم حالت ته یې نزولي ترتیب وایي په عمومی توګه د

$$P(x) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$$

پولینوم په نزولي توګه ترتیب شوی، په داسې حال کې چې د

$$Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4$$

پولینوم به صعودي توگه ترتیب شوی دی. خو متحوله پولینومونه نظر هر متحول ته بیل بیل ترتیب کیدلی شي.

د پولینومونو تساوی

دوه پولینومونه یو تر بله سره مساوی دي، که چېرې او یوازې که چېرې، لومړی دا چې د دواړو پولینومو درجې سره مساوي وي او دوهم دا چې د مساوی درجو پولینونو ضریبونه دوه په دوه سره مساوي وي.

د یو پولینوم عددی قیمت

که چېرې د $P(x)$ په پولینوم کې د x د متحول پر ځای د a ثابت عدد وضع شي. نو د $P(a)$ ثابت عدد په a کې د $P(x)$ پولینوم عددی قیمت دی. 3 مثال. د $P(x) = x^2 - 6x + 8$ پولینوم عددی قیمتونه د 0 ، 2 ، 4 او 10 په عددونو کې عبارت دي له

$$P(0) = 0^2 - 6 \times 0 + 8 = 8$$

$$P(2) = 2^2 - 6 \times 2 + 8 = 0$$

$$P(4) = 4^2 - 6 \times 4 + 8 = 0$$

$$P(10) = 10^2 - 6 \times 10 + 8 = 48$$

د پولینومونو جمع

د پولینومونو په جمع کولو کې، هم جنس (مشابه) پولینومونه یو تر بله سره جمع کېږي. او دخو پولینومونو د جمع حاصل د یو نوي پولینوم څخه عبارت دی. په یو پولینومونو کې د جمع عملیې د اتحادي او توزیعي قوانینو په نظر کې نیولو سره په افقي یا عمودي توگه سرته رسیږي.

4 مثال. د $P(x) = 5x^2 + x - 8$ او $Q(x) = 3x + 2$ پولي نومونو د جمع حاصل

په لاس راوړئ؟

حل. افقي روش:

$$P(x) + Q(x) = (5x^2 + x - 8) + (3x + 2) = 5x^2 + (x + 3x) + (-8 + 2)$$

$$\Rightarrow P(x) + Q(x) = 5x^2 + 4x - 6$$

عمودي روش

$$P(x) = 5x^2 + x - 8$$

$$Q(x) = \quad 3x + 2$$

$$P + Q = 5x^2 + x - 8$$

5 مثال. د $3x^3 + 5x^2 - 4x$ ، $x^3 + 3x^2 + 8$ او $-x^2 - x - 2$

پولي نومونه سره جمع کړئ؟

حل:

$$3x^3 + 5x^2 - 4x$$

$$x^3 + 3x^2 \quad + 8$$

$$- x^2 - x - 2$$

$$3x^3 + 7x^2 - 6x + 6$$

د پولي نومونو تفریق

د $P(x)$ څخه د $Q(x)$ د تفریق کولو لپاره د $P(x) + [-Q(x)]$ مجموعه

حسابېږي. یعنې په اوله مرحله کې د مفروق منځ د پولي نوم علامه بدلولو او بیا هغه د

مفروق سره په الجبري توګه جمع کوو.

6 مثال. د $2x^3 - 4x^2 + 8 - x$ د $5x^4 + x - 3x^2 - 9$ پولي نوم څخه

تفریق کړئ؟

حل:

$$\begin{array}{r} 5x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x - 9 \\ \pm 2x^3 \mp 4x^2 \mp x \pm 8 \\ \hline 5x^4 - 2x^2 + x^2 + 2x - 17 \end{array}$$

7 مثال. د $A = 2x + 3y - 4z$ ، $B = 3x - 2y + 5z$ او

$C = 3y - 5x - z$ په نظر کې ونیسئ د $3A - 2B + C$ افاده حساب کړئ؟

حل:

$$\begin{aligned} 3A - 2B + C &= 3(2x + 3y - 4z) - 2(3x - 2y + 5z) + (3y - 5x - z) \\ &= 6x + 9y - 12z - 6x + 4y - 10z + 3y - 5x - z \\ &= 6x - 6x - 5x + 9y + 4y + 3y - 12z - 10z - z \\ &\Rightarrow 3A - 2B + C = -5x + 16y - 23z \end{aligned}$$

8 مثال. د $4x^3 - x^2 + 2x - 7$ پولینوم د $3x^3 + 8x^2 + x$ او

$2x^3 - 3x^2 - 6$ پولینومونو د مجموعه څخه تفریق کړئ؟

حل:

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 8x^2 + x \\ \underline{2x^3 - 3x^2 + 0x - 6} \\ 5x^3 + 5x^2 + x - 6 \\ \underline{\pm 4x^3 \mp x^2 \pm 2x \mp 7} \\ x^3 + 6x^2 - x + 1 \end{array}$$

د پولینومونو ضرب

د پولینومونو په ضرب کې د توانونو ساده قاعدې اساس نیسي. بنا پر دې د توانونو د څو قاعدو یادونه کوو.

$$x^n = \underbrace{xxx \dots x}_n$$

دا (x) په توان دې n ویل کیږي دلته x ته قاعده (اساس) او n ته توان وایي. د طبیعي عددونو m او n او حقیقي عددونو x او y لپاره دا لاندې قاعدې شته دي.

$$1. \quad x^m x^n = x^{m+n} \quad , \quad 2. \quad (x^m)^n = x^{mn} \quad , \quad 3. \quad (xy)^n = x^n y^n$$

$$4. \quad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \quad , \quad m > n \quad , \quad 5. \quad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \quad , \quad m, n \in \mathbb{N}$$

دا هر یوه پورتنۍ رابطه په ترتیب سره د مشخصو مثالونو (نمونو) په وسیله په لاندې ډول واضح کیږي.

$$1. \quad x^3 x^5 = (xxx)(xxxx) = xxxxxxxx = x^8 = x^{3+5}$$

$$2. \quad (x^2)^3 = x^2 x^2 x^2 = (xx)(xx)(xx) = xxxxxx = x^6 = x^{2 \cdot 3}$$

$$3. \quad (xy)^3 = (xy)(xy)(xy) = (xxx)(yyy) = x^3 y^3$$

دلته د طبیعي عددونو د توانونو د قاعدو د معرفي کولو څخه هدف یوازې د پولینومونو د ضرب او تقسیم اسانتیاوې دي. د لوگارتیم په بحث کې به دا موضوع لږ په پراخه توګه تر بحث لاندې نیول کیږي.

د دوو پولینومونو د الجبري قاعدې $x^m x^n = x^{m+n}$ په نظر کې نیولو سره د اول پولینوم هر حد د دوهم پولینوم د حدونو سره ضرب او بیا سره جمع کیږي.

9 مثال. د $P(x) = x^2 - 7x + 4$ او $Q(x) = 5x^3 + x^2 - 2x$ پولینومونه سره جمع کړئ.

حل:

$$P(x)Q(x) = (x^2 - 7x + 4)(5x^3 + x^2 - 2x)$$

$$= (5x^5 + x^4 - 2x^3) + (-35x^4 - 7x^3 + 14x^2) + (20x^3 + 4x^2 - 8x)$$

$$\Rightarrow P(x)Q(x) = 5x^5 - 34x^4 + 11x^3 + 18x^2 - 8x$$

په دوهمه طریقه

$$\begin{array}{r} 5x^3 + x^2 - 2x \\ x^2 - 7x + 4 \\ \hline 5x^5 + x^4 - 2x^3 \\ - 35x^4 - 7x^3 + 14x^2 \\ \hline 20x^3 + 4x^2 - 8x \\ \hline 5x^5 - 34x^4 + 11x^3 + 18x^2 - 8x \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow P(x)Q(x) = 5x^5 - 34x^4 + 11x^3 + 18x^2 - 8x$$

10 مثال. د $P(x) = 2x - 1$ او $Q(x) = 7x^2 - 10x + 4$ پولینومونو د ضرب حاصل په لاندې ډول په لاس راځي.

$$\begin{aligned} P(x)Q(x) &= (2x - 1)(7x^2 - 10x + 4) \\ &= (14x^3 - 20x^2 + 8x) + (-7x^2 + 10x - 4) \\ &= 14x^3 - 27x^2 + 18x - 4 \end{aligned}$$

د پولینومونو د ضرب خاصیتونه

د $P(x)$ ، $Q(x)$ و $R(x)$ پولینومونو لپاره لرو چې

1. $P(x)Q(x) = Q(x)P(x)$
2. $[P(x)Q(x)]R(x) = P(x)[Q(x)R(x)]$
3. $P(x)[Q(x) + R(x)] = P(x)Q(x) + P(x)R(x)$
3. $P(x) \cdot 1 = P(x)$

د پولینومونو تقسیم

د $P(x)$ پولینوم تقسیم د $D(x)$ پر پولینوم باندې، لکه د p حقیقی عدد تقسیم د d پر حقیقی عدد، په شان دی. که چېرې خارج قسمت په $Q(x)$ او باقیمانده په $R(x)$ سره فرض کړو نو د مقسوم $P(x)$ ، مقسوم علیه $D(x)$ ، خارج قسمت $Q(x)$ او باقیمانده $R(x)$ تر منځ رابطه د حقیقی عددونو په شان په لاندې ډول موجود ده.

$$P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$$

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \text{ یا}$$

11 مثال. د $P(x) = 2x^4 + 3x^2 - x^2 - 1$ پولینوم پر $D(x) = x - 2$

تقسیم کړئ؟

حل:

$$\begin{array}{r}
 2x^3 + 7x^2 + 13x + 26 \\
 x-2 \overline{) 2x^4 + 3x^3 - x^2 - 1} \\
 \underline{\pm 2x^4 \mp 4x^3} \\
 7x^3 - x^2 - 1 \\
 \underline{\pm 7x^3 \mp 14x^2} \\
 13x^2 - 1 \\
 \underline{\pm 13x^2 \mp 26x} \\
 26x - 1 \\
 \underline{\pm 26x \mp 52} \\
 51
 \end{array}$$

بنا پر دې

$$2x^4 + 3x^3 - x^2 - 1 = (2x^3 + 7x^2 + 13x + 26)(x - 2) + 51$$

اویا

$$\frac{2x^4 + 3x^3 - x^2 - 1}{x - 2} = 2x^3 + 7x^2 + 13x + 26 + \frac{51}{x - 2}$$

12 مثال. د $P(x) = x^3 - 8$ پر $D(x) = x - 2$ باندې تقسیم کړئ

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x + 4 \\ x - 2 \overline{) x^3 - 8} \\ \underline{\pm x^3 \mp 2x^2} \\ 2x^2 - 8 \\ \underline{\pm 2x^2 \mp 4x} \\ 4x - 8 \\ \underline{\pm 4x \mp 8} \\ \times \end{array}$$

$$\Rightarrow x^3 - 8 = (x^2 + 2x + 4)(x - 2) \Leftrightarrow \frac{x^3 - 8}{x - 2} = x^2 + 2x + 4$$

د باقیمانده قضیه

که چېرې د $P(x)$ پولینوم د $x - a$ پر افاده تقسیم شي د تقسیم باقیمانده د $P(a)$ څخه عبارت دی.

ثبوت: فرض کوو د $P(x)$ خارج قسمت د $x - a$ پر افاده باندې د $Q(x)$ پولینوم څخه عبارت وي او باقیمانده یې R وي نو

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R$$

په اخره رابطه کې $x = a$ اېږد ونو په لاس راځي چې

$$P(a) = (a - a)Q(x) + R \Rightarrow P(a) = 0 \cdot Q(x) + R \Rightarrow P(a) = R$$

13 مثال. که چېرې $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 7$ پر $x - 3$ تقسیم کړو باقیمانده

$$P(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 7 = 13$$
 عبارت دی له

14 مثال. که چېرې $P(y) = y^3 - 125$ پر $y - 5$ تقسیم شي. باقیمانده

$$P(5) = 5^3 - 125 = 0$$
 عبارت دی له

عامله قضیه که چېرې د $P(x)$ پولینوم په $x = a$ کې صفر شي

$(P(a) = 0)$ نو $P(x)$ په $x - a$ باندې پوره د تقسیم وړ دی. (د $x - a$

افاده د $P(x)$ یو ضربی عامل دی)

$$P(x) = (x - a)Q(x) + P(a), P(a) = 0 \Rightarrow P(x) = (x - a)Q(x)$$

15 مثال. ونیسې چې د $P(x) = x^2 - 5x + 6$ پولینوم د $x - 2$ او $x - 3$ په

افادو باندې د تقسیم وړ دی؟

حل.

$$P(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0, P(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$$

بنا پر دې

$$P(x) = x^2 - 5x + 6$$
 پر $x - 2$ او $x - 3$ د تقسیم وړ دی.

x

ترکيبي تقسيم (د هورنر¹ روش)

د $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ پولینوم تقسیم په $x - a$ باندې د هغې د ضریبونو په مرسته ساده کیدلی شي. داسې چې د پولینوم ضریبونه، a ته مخامخ په یوه کرښه کې د لاندې جدول سره سم فهرست کوو. او بیا د ضریبونه د ضرب څخه د a سره د خارجقسمت پولینوم ضریبونه په لاس راوړو.

$$\begin{array}{r}
 a_n \quad a_{n-1} \quad a_{n-2} \quad \dots \quad a_2 \quad a_1 \quad a_0 \quad \big| \quad a \\
 \hline
 \quad a a_n \quad a \alpha_{n-1} \quad \dots \quad a \alpha_3 \quad a \alpha_2 \quad a \alpha_1 \\
 \hline
 a_n \quad \alpha_{n-1} \quad \alpha_{n-2} \quad \dots \quad \alpha_2 \quad \alpha_1 \quad \alpha_0 = R = P(a)
 \end{array}$$

په داسې حال کې چې

$\alpha_0 = a_0 + a a_1$ ، $\alpha_1 = a_1 + a a_2$ ، $\dots$ ، $\alpha_{n-1} = a_{n-1} + a a_n$ او $\alpha_n = a_n$ ، α_{n-1} ، α_{n-2} ، $\dots$ ، او α_1 د خارجقسمت پولینوم ضریبونه دي، داسې چې د هغې درجه د $P(x)$ د درجې څخه یو واحد کمه ده او α_0 باقیمانده عدد دی.

16 مثال. د $P(x) = 2x^3 + x^2 - 6x + 9$ پولینوم پر $x - 3$ باندې تقسیم کړئ، خارجقسمت او باقیمانده یې معلوم کړئ؟

$$\begin{array}{r}
 2 \quad 1 \quad -6 \quad 9 \quad \big| \quad 3 \\
 \quad 6 \quad 21 \quad 45 \\
 \hline
 2 \quad 7 \quad 15 \quad 54 = P(3)
 \end{array}$$

خارجقسمت : $Q(x) = 2x^2 + 7x + 15$

باقیمانده: $R = 54 = p(3)$

¹ Horner

17 مثال. د $p(x) = x^4 - 81$ پولینوم پر $x - 3$ باندې تقسیم کړئ؟

حل. پورتنی پولینوم عبارت دی له $p(x) = x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 81$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & -81 & \\ & 3 & 9 & 27 & 81 & \\ \hline 1 & 3 & 9 & 27 & 0 & = P(3) \end{array}$$

خارج قسمت $q(x) = x^3 + 3x^2 + 9x + 27$ او باقیمانده صفر دی .

18 مثال. د $P(x) = 2x^4 + 5x^3 + 4x + 7$ پولینوم پر $x + 3$ تقسیم کړئ؟

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 5 & 0 & 4 & 7 & (-3) \\ & -6 & 3 & -9 & 15 & \\ \hline 2 & -1 & 3 & -5 & 22 & \end{array}$$

$$Q(x) = x^3 - x^2 + 3x - 5$$

$$R = 22 = P(-3)$$

خارج قسمت

باقیمانده

الجبري مطابقتونه

د ځينو مشخصو افاده د ضربې رابطو کارول په زیاتو عملیو، له هغې جملې څخه د

الجبري افادو په تجزیه کې ګټور دي، الجبري مطابقتونه چې یوازې د ضرب په

مرسته ثبوت کېږي لاندې طرحه کېږي

$$1. \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2. \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$3. \quad (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

4. $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
5. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
6. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
7. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$
8. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 + 3ab(a-b)$
9. $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
10. $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
11. $(a+b)(a^2 - a^2b + ab^2 - b^3) = a^4 + b^4$
12. $(a-b)(a^2 + a^2b + ab^2 + b^3) = a^4 - b^4$
13. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$
14. $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
15. $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
16. $(x+a)(x+c) = x^2 + (a+b)x + bd$
17. $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$
18. $(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n - b^n$
19. $(a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n - b^n$

مثالونه

19 مثال. $(1005)^2$ او $(195)^2$ عددونه حساب کړئ؟

حل:

$$\begin{aligned}(1005)^2 &= (1000 + 5)^2 = (1000)^2 + 2(1000)(5) + 5^2 \\ &= 1000\ 000 + 10\ 000 + 25 = 1\ 010\ 025\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(195)^2 &= (200 - 5)^2 = (200)^2 - 2(200)(5) + 5^2 \\ &= 40\ 000 - 2\ 000 + 25 = 38\ 025\end{aligned}$$

20 مثال. که چېرې $a + b = 7$ او $ab = 12$ وي نو د $a^2 + b^2$ افاده

حساب کړئ؟

حل:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ \Rightarrow a^2 + b^2 &= (a + b)^2 - 2ab = 7^2 - 2 \times 12 = 25\end{aligned}$$

21 مثال. که چېرې $a + b = 7$ او $a - b = 1$ وي نو د $a^2 + b^2$ ، $4ab$ او

$8ab(a^2 + b^2)$ افادې حساب کړئ.

حل:

$$\begin{aligned}2(a^2 + b^2) &= (a^2 + b^2) + (a^2 - b^2) = 7^2 + 1^2 = 50 \\ 4ab &= (a^2 + b^2) - (a^2 - b^2) = 7^2 - 1^2 = 48 \\ 8ab(a^2 + b^2) &= (4ab)2(a^2 + b^2) = (48)(50) = 2400\end{aligned}$$

22 مثال. د $(2a - 3b + 4c)^2$ افادې ته انکشاف ورکړئ؟

حل:

$$\begin{aligned}
(2a - 3b + 4c)^2 &= [(2a) + (-3b) + (4c)]^2 \\
&= (2a)^2 + (-3b)^2 + (4c)^2 + 2(2a)(-3b) + 2(2a)(4c) + 2(-3b)(4c) \\
&= 4a^2 + 9b^2 + 16c^2 - 12ab + 16ac - 24bc
\end{aligned}$$

23 مثال. د $(5x + 3y)^3$ او $(4x - 3)^3$ افادی محاسبه کړئ؟

حل:

$$\begin{aligned}
(5x + 3y)^3 &= (5x)^3 + 3(5x)^2(3y) + 3(5x)(3y)^2 + (3y)^3 \\
&= 125x^3 + 225x^2y + 135xy^2 + 27y^3 \\
(4x - 3)^3 &= (4x)^3 - 3(4x)^2(3) + 3(4x)(3)^2 - (3)^3 \\
&= 64x^3 - 144x^2 + 108x - 27
\end{aligned}$$

24 مثال. د $(3a + 2b)(9a^2 - 6ab + 4b^2)$ افاده ساده کړئ؟

حل:

$$\begin{aligned}
(3a + 2b)(9a^2 - 6ab + 4b^2) &= (3a + 2b)[(3a)^2 - (3a)(2b) + (2b)^2] \\
&= (3a)^3 + (2b)^3 = 27a^3 + 8b^3
\end{aligned}$$

25 مثال. د $(x + 5)(x - 5)(x^2 - 5x + 25)(x^2 + 5x + 25)$ افاده ساده کړئ؟

حل:

$$\begin{aligned}
(x + 5)(x - 5)(x^2 - 5x + 25)(x^2 + 5x + 25) &= \\
&= (x + 5)(x^2 - 5x + 25)(x - 5)(x^2 + 5x + 25) \\
&= (x^3 + 125)(x^3 - 125) = (x^3)^2 - (125)^3 = x^6 - 15625
\end{aligned}$$

د الجبري افادو تجزيه (Factoring)

ضريي عوامل:

که چېرې يوه الجبري افاده P پر D باندې د تقسيم وړ وي، نو p ته د D مضرب $Multiple$ او D ته د p ضريي عامل ($factor$) يا قاسم ($Divisor$) وايي. بنا پر دې

$$\frac{P}{Q} = M \Leftrightarrow P = MD \Leftrightarrow D = \frac{P}{M}$$

يعني M هم د P يو قاسم دی.

د يوې الجبري افادې اړانه کول د هغې د قاسمونو د ضرب د حاصل په توګه د نوموړې افادې تجزيه بلل کېږي. مثلاً

$$6x^2 - 5xy + 6y^2 = (2x - 3y)(3x - 2y)$$

دلته $2x - 3y$ او $3x - 2y$ د $6x^2 - 5xy + 6y^2$ افادې قاسمونه دي. او بالعکس وروستنی افاده د دوو نورو افادو $2x - 3y$ او $3x - 2y$ مضرب دی.

د الجبري افادو په تجزيه کولو کې د عمومي مطابقتونو څخه ګټه اخيستل کېږي. اول. د هغو افادو تجزيه چې مشترک عامل لري. په سر کې د $ab + ac = a(b + c)$ مطابقت د افادو په تجزيه کولو کې کاروو.

26 مثال.

$$(i) \quad 6x^2 - 2x^3 = 2x^2(y - 2x)$$

$$(ii) \quad 6a^2bx + 6a^2by = 6a^2b(x + y)$$

دوهم. د مربعاتو د تفاضل تجزيه. د $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ مطابقت د $a^2 - b^2$ د ډول تجزيو اساس دی. او زيات استعمال لري.

27 مثال.

$$(i) \quad x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x - 5)(x + 5)$$

$$(ii) \quad 4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x - 3y)(2x + 3y)$$

دریم. د کاملې مربع د افادې تجزیه. د دا ډول افادو تجزیه د $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ شکل لري.

28 مثال.

$$(i) \quad x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

$$(ii) \quad 9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x - 2y)^2$$

څلورم. د ځینو دوهمه درجه افادو تجزیه. د $ax^2 + bx + c$ افادې د تجزئې لپاره کوشش کېږي چې د b ضریب د دوو عددونو د مجموعې په توګه اړانه شي، داسې چې د هغوی د ضرب حاصل د ac سره مساوی شي. دا روش په ځینو ځانګړو حالاتو کې امکان لري.

د دې برسيره د لاندې مطابقتونو څخه هم ګټه اخیستلی شو.

$$(x + a)(x + c) = x^2 + (a + c)x + ac$$

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

29 مثال.

$$\begin{aligned} (i) \quad 3x^2 + 14x + 8 &= 3x^2 + (12 + 2)x + 8 \\ &= 3x(x + 4) + 2(x + 4) = (3x + 2)(x + 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 12x^2 + 5x - 2 = 12x^2 + (8-3)x - 2 \\
 &= 12x^2 + 8x - 3x - 2 = 4x(3x+2) - (3x+2) \\
 &= (4x-1)(3x+2)
 \end{aligned}$$

پنځم. د گروپ بندۍ په روش تجزیه. ځینې افادې کیدلې شي د لاندې مطابقتونو په استفاده تجزیه شي

$$ac + bc + ad + bd = (a+b)c + (a+b)d = (a+b)(c+d)$$

30 مثال.

$$2ax - 4bx + ay - 2by = (a-2b)2x + (a-2b)y = (a-2b)(2x+y)$$

شپږم. د $a^n \pm b^n$ ډوله افادو تجزیه. دا افادې څو حالتونه لري.

31 مثال.

$$\begin{aligned}
 (i) \quad x^3 + 27 &= x^3 + 3^3 = (x+3)(x^2 - 3x + 9) \\
 (ii) \quad 8x^3y^3 - 1 &= (2xy)^3 - 1 = (2xy-1)(4x^2y^2 + 2xy + 1) \\
 (iv) \quad x^4 - 81y^4 &= (x^2)^2 - 9^2 = (x^2-9)(x^2+9) = (x-3)(x+3)(x^2+9)
 \end{aligned}$$

اوم. د مناسبو حدونو د جمع کولو او تفریق کولو روش. په دې طریقه کې د مربع د تکمیل لپاره مناسب حدودونه د اصلي افادې سره جمع او تفریق کېږي.

32 مثال.

$$\begin{aligned}
 (i) \quad x^4 + 4 &= (x^2)^2 + 2^2 = (x^2)^2 + 4x^2 + 2^2 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\
 &= (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x - 2)
 \end{aligned}$$

$$(ii) \quad 4a^4 + 8a^2b^2 + 9b^4 = (2a^2)^2 + 2(2a^2)(3b^2) + (3b^2)^2 - 4a^2b^2 \\ = (2a^2 + 3b^2)^2 - (2ab)^2 = (2a^2 + 3b^2 - 2ab)(2a^2 + 3b^2 + 2ab)$$

اتم. د عاملې قضیې په کارولو سره تجزیه. که چېرې د یو پولینوم $P(x)$ قیمت په $x = a$ کې صفر وي $P(a) = 0$ ، په دې صورت کې $x - a$ د $P(x)$ یو ضربی عامل دی. نو د $P(x)$ تقسیم پر $x - a$ باندې دوهم عامل د خارج قسمت په توګه په لاس راځي.

33 مثال.

$P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 28 \Rightarrow P(2) = 2^3 + 3(2)^2 + 4(2) - 28 = 0$
نو $x - 2$ د $P(x)$ یو ضربی عامل دی په دې ترتیب د هغې دوم عامل عبارت دی له

$$P(x) \div (x - 2) = \frac{x^3 + 3x^2 + 4x - 28}{x - 2} = x^2 + 5x + 14 \\ \Rightarrow x^3 + 3x^2 + 4x - 28 = (x^2 + 5x + 14)(x - 2)$$

د پولینومونو تر ټولو لوی مشترک قاسم

Highest Common Factor (HCF)

د دوو یا څو پولینومونو تر ټولو لوی مشترک قاسم، د هغې مشترک ضربی عامل څخه عبارت دی چې تر ټولو لوړ توان ولري او ضریب یې تر ټولو لوی عددی قیمت ولري.

هغه پولینومونه چې تر ټولو لوی مشترک قاسم یې ± 1 وي. یو تر بله اولیه ویل کېږي.

د دوو یا څو پولینومونو د تر ټولو لوی مشترک قاسم د پیدا کولو لپاره هغه هر یو تجزیه کوو، د دوی د مشترکو هغه عاملونو، چې تر ټولو توان او تر ټولو لوی عددی قیمت ولري، د ضرب کولو څخه غوښتل شوی قاسم په لاس راځي.

34 مثال. د $9x^4y^2$ او $12x^3y^3$ افادو تر ټولو لوی مشترک قاسم پیدا کړئ؟

حل: دا راکړل شوي افادې تجزیه کوو

$$9x^4y^2 = 3^2 x^4 y^2, \quad 12x^3y^3 = 2^2 \cdot 3x^3y^3 \Rightarrow H.C.F. = 3x^3y^2$$

د پولینومونو تر ټولو کوچنی مشترک مضرب

Lowest Common Multiple (L.C.M.)

د دوو یا څو پولینومونو تر ټولو کوچنی مشترک مضرب هغه پولینوم دی. چې پر نوموړوهر یو پولینوم باندې د تقسیم وړ وي. او تر ټولو ممکنه درجه ولري. ددوو یا څو پولینومونو د تر ټولو کوچنی مشترک مضرب د پیدا کولو لپاره دا هر یو پولینوم تجزیه کوو. ددې مشترکو مضربونو څخه هغه چې، تر ټولو ټیټ توان او په ضریب کې تر ټولو کوچنی عددي قیمت ولري، سره ضربوو او مطلوب مضرب په لاس راکوي.

35 مثال. د $9x^4y^2$ او $12x^3y^3$ تر ټولو کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

حل. راکړل شوی افادی تجزیه کوو

$$9x^4y^2 = 3^2 x^4 y^2, \quad 12x^3y^3 = 2^2 \cdot 3x^3y^3 \Rightarrow L.C.M. = 2^2 \cdot 3^2 x^4 y^3 = 36x^4y^3$$

36 مثال. تر ټولو لوی مشترک قاسم او تر ټولو کوچنی مشترک مضرب د

$48r^3t^4$ او $54r^2t^6$ او $60r^4t^2$ لپاره پیدا کړئ.

حل:

$$\left. \begin{aligned} 48r^3t^4 &= 2^4 \cdot 3r^3t^4 \\ 54r^2t^6 &= 2 \cdot 3^3 r^2t^6 \\ 60r^4t^2 &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5r^4t^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} H.C.F. &= 2 \cdot 3r^2t^2 = 6r^2t^2 \\ L.C.M. &= 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5r^4t^6 = 2160r^4t^6 \end{aligned}$$

37 مثال. تر ټولو لوی مشترک قاسم او تر ټولو کوچنی مشترک مضرب د
 $y^4 - 16$ ، $y^2 - 4$ او $y^2 - 3y + 2$ لپاره پیدا کړئ؟
 حل:

$$\left. \begin{aligned} y^4 - 16 &= (y^2 + 4)(y + 2)(y - 2) \\ y^2 - 4 &= (y + 2)(y - 2) \\ y^2 - 3y + 2 &= (y - 1)(y - 2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} H.C.F. &= y - 2 \\ L.C.M. &= (y^2 + 4)(y + 2)(y - 1)(y - 2) \end{aligned}$$

38 مثال. د لاندې افادو لپاره تر ټولو لوی مشترک قاسم او تر ټولو کوچنی مشترک
 مضرب پیدا کړئ

$$3 \cdot 5^2 (x + 3y)^2 (2x - y)^4 \text{ و } 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 (x + 3y)^4 (2x - y)^5$$

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 (x + 3y)^3 (2x - y)^2$$

حل:

$$\left. \begin{aligned} 3 \cdot 5^2 (x + 3y)^2 (2x - y)^4 \\ 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 (x + 3y)^3 (2x - y)^2 \\ 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 (x + 3y)^4 (2x - y)^5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} H.C.F. &= 3 \cdot 5 (x + 3y)^2 (2x - y)^2 \\ L.C.M. &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 (x + 3y)^4 (2x - y)^5 \end{aligned}$$

**د دوو افادو تر ټولو لوی مشترک قاسم او تر ټولو کوچنی مشترک مضرب تر منځ
 رابطه**

که چېرې H د A او B تر ټولو لوی مشترک قاسم او L د هغوی تر ټولو
 کوچنی مشترک مضرب وي

$$\frac{A}{H} = X \Rightarrow A = HX \quad , \quad \frac{B}{H} = Y \Rightarrow B = HY$$

د تعریف له مخې د X او Y فکتورونه مشترک عامل نه لري. نو

$$L = HXY \Rightarrow HL = (HX)(HY) = AB$$

$$\Rightarrow HL = AB \vee (H.C.L.) \times (L.C.M.) = AB$$

بناپر دی ددوو افادو د ضرب حاصل مساوی دی د تر ټولو لوی مشترک قاسم او تر ټولو کوچنی مشترک مضرب د ضرب د حاصل سره. په دی ترتیب ددوو افادو تر ټولو لوی مشترک قاسم او تر ټولو کوچنی مشترک مضرب د پورتنی رابطې له مخې ددوی د ضرب له حاصل څخه په لاس راوړي. یعنې

$$(H.C.L.) \times (L.C.M.) = A \times B \Leftrightarrow H.C.L. = \frac{A \times B}{L.C.M.} \Leftrightarrow L.C.M. = \frac{A \times B}{H.C.L.}$$

39 مثال. د $A = 12x^3y^3$ او $B = 9x^4y^2$ لپاره لرو چې

$$A = 12x^3y^3, B = 9x^4y^2 \Rightarrow AB = (12x^3y^3)(9x^4y^2) = 108x^7y^5$$

$$L = 36x^4y^3 \Rightarrow H = \frac{AB}{L} = \frac{108x^7y^5}{36x^4y^3} = 3x^3y^2$$

ناطقې افادې

که چېرې $P(x)$ او $Q(x)$ پولینومونه وی او $Q(x) \neq 0$ ، په دې صورت کې

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

د یوې ناطقې افادې یا الجبري کسر څخه عبارت دی، په ځانګړي حالت کې هر یو پولینوم هم یوه ناطقه افاده ده. الجبري کسرونه د عددي کسرونو تعمیم شوی شکل دی.

د الجبري کسرونو د جمع او تفریق عملې

د الجبري کسرونو د جمع او تفریق عملې د عددونو د جمع او تفریق د عملیو سره ورته والی لري. یعنې په اولني قدم کې کسرونه سره هم منځرجه کيږي او بیا مربوطه

عمليې ددوی پر صورتونو باندې اجرا کېږي د کسرونو په هم مخرج کولو کې، په طبيعي توګه مشترک مخرج د دوی د مخرجونو تر ټولو کوچنی مشترک مضرب انتخابېږي. وروسته دا مشترک مخرج پر هر مخرج تقسیمېږي او په مربوطه صورت کې ضربېږي او بیا سره جمع کېږي چې په نتیجه کې د نوموړي کسر صورت په لاس راکوي.

مثالونه:

$$41 \quad \frac{7x}{8} + \frac{5x}{12} - \frac{2x}{3} = \frac{21x + 10x - 16x}{24} = \frac{15x}{24} = \frac{5x}{8}$$

$$42 \quad 3x - \frac{a^2}{4y} + \frac{x^2y}{4xy^2} = \frac{12x^2y^2 - a^2xy + x^2y}{4xy^2} = \frac{xy(12xy - a^2 + x)}{4xy^2} = \frac{12xy - a^2 + x}{4y}$$

$$\begin{aligned} 43 \quad \frac{a^2 - 2a}{a^2 - a - 2} - \frac{3a}{6a - 4} + \frac{5a}{6a^2 + 2a - 4} &= \frac{a(a-2)}{(a+1)(a-2)} - \frac{3a}{2(3a-2)} + \frac{5a}{2(3a^2 + a - 2)} \\ &= \frac{a}{a+1} - \frac{3a}{2(3a-2)} + \frac{5a}{2(3a-2)(a+1)} = \frac{2a(3a-2) - 3a(a+1) + 5a}{2(3a-2)(a+1)} = \frac{3a^2 - 2a}{2(3a-2)(a+1)} \\ &= \frac{a(3a-2)}{2(3a-2)(a+1)} = \frac{a}{2(a+1)} \end{aligned}$$

د الجبري کسرونو ضرب او تقسیم

په الجبري کسرونو کې د ضرب او تقسیم دوې عمليې هم، د عددي کسرونو د ضرب او تقسیم په شان دي. یعنې د څو کسرونو په ضرب کې صورتونه په خپل منځ

کې سره ضربېږي او دلایز اختصار څخه وروسته د ضرب د حاصل کسر په لاس راځي. او په تقسیم کې یوازې مقسوم علیه معکوس کېږي او د مقسوم سره ضربېږي.

مثالونه

$$44. \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad 45. \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$46. \quad \frac{24x^3y^2z}{35ab^4c^3} \div \frac{6x^2yz^3}{7a^2b^2c} = \frac{24x^3y^2z}{35ab^4c^3} \cdot \frac{7a^2b^2c}{6x^2yz^3} = \frac{4axy}{5b^2c^2z^2}$$

کسرالکسر (مركب کسر)

هغه کسرونه چې په هغې کې صورت او مخرج پخپله کسرونه وي، کسرالکسر بلل کېږي.

کسرالکسر په حقیقت کې د تقسیم ضمني حالت دی، داسې چې په هغې کې د تقسیم علامه همغه د کسر خط دی.

47 مثال. ددې کسر مثالونه په لاندې ډول دي؟

$$(i) \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \quad (ii) \quad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$$

$$(iii) \quad \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{1} \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$$

د $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ کسر د $\frac{a}{b}$ او یا $\frac{a}{c}$ ارایه کېدای شي.

مثالونه

$$48. \quad \frac{\frac{2}{a-b}}{\frac{a-b}{a-b}} = \frac{2}{a-b} \cdot \frac{1}{a-b} = \frac{2}{(a-b)^2}$$

$$49. \quad \frac{\frac{x+y}{3x^2}}{\frac{x-y}{3x^2}} = \frac{x+y}{3x^2} \cdot \frac{x}{x-y} = \frac{x+y}{3x(x-y)}$$

$$50. \quad \frac{\frac{x}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}}{\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{x+1}{x}}}} = \frac{\frac{x}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}}{\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{x+1}{x}}}} = \frac{\frac{x}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}}{\frac{1}{1-\frac{x}{x+1}}} = \frac{\frac{x}{1+\frac{1-x}{1+\frac{1}{x}}}}{\frac{x+1-x}{x+1}} = \frac{\frac{x}{1+\frac{1-x}{1+\frac{1}{x}}}}{\frac{1}{x+1}} = x+1$$

غیر ناطقې افادې

لکه څرنګه چې د عددونو په مبحث کې وویل شول، هغه حقيقي عدد چې ددوو تامو عددونو د نسبت په توګه اړته کیدلی نشي د غیر ناطق عدد څخه عبارت دی. په همدې ډول هغه الجبري افاده چې ددوو پولینومونو د نسبت په توګه اړته کیدلی نشي، د غیر ناطقې افادې په نامه یادېږي. د نمونې په توګه دا ډول افادې په لاندې ډول دي.

51 مثال.

$$(i) \sqrt{xy+z^3-y^2}, \quad (ii) \sqrt[3]{a+b-2c}, \quad (iii) \frac{x^2-4x+6}{\sqrt{2x^3+x-8}}$$

$$(iv) \frac{\sqrt{8x-7}+x^2}{x^6-7x^3+45}, \quad (v) \frac{x+\sqrt{y-x}}{x-\sqrt{y+z}}, \quad (vi) \frac{a+b}{\sqrt[4]{a+b-2c}}$$

کیدلی شي د عددونو او الجبري افادو جذرونه ناطقې افادې يا غیر ناطقې افادې وي. لکه څرنگه چې $\sqrt{7}$ ، $\sqrt{a^2+b^2}$ ، $\sqrt[3]{x+y-z}$ غیر ناطقې افادې دي، په داسې حال کې $\sqrt[3]{8}$ ، $\sqrt{x^2+2xy+y^2}$ ناطقې افادې دي. دلته د یوې افادې د جذر څخه مقصد، یوه دوهمه افاده ده چې که چېرې د جذر د مرتبې په مطابق توان سره رفع شي نو لومړنۍ افاده په لاس راکوي. دا مفهوم دې د معادلې د جذر د مرتبې په، مطابق توان سره، رفع شي نو لومړنۍ افاده په لاس راکوي. دا مفهوم دې د معادلې د جذر سره مغالطه ونشي.

د غیر ناطقو افادو خاصیتونه

1. یوه غیر ناطقه جذر المربع، د یو ناطق عدد او د یوې غیر ناطقې جذر المربع د مجموعې یا تفاضل په توګه نه شي اړانه کیدلې. یعنې

$$\sqrt{a} \neq x \pm \sqrt{y}$$

ثبوت. فرض کوو چې $\sqrt{a} = x \pm \sqrt{y}$ ، پس

$$\begin{aligned} \sqrt{a} = x \pm \sqrt{y} &\Rightarrow (\sqrt{a})^2 = (x \pm \sqrt{y})^2 \Rightarrow a = x^2 + y \pm 2x\sqrt{y} \\ &\Rightarrow \pm 2x\sqrt{y} = a - x^2 - y \Rightarrow \pm\sqrt{y} = \frac{a - x^2 - y}{2x} \end{aligned}$$

په داسې حال کې چې اخرنۍ نتیجه غیر ممکنه ده.

2. د $a + \sqrt{b}$ او $x + \sqrt{y}$ غیر ناطقو افادو د تساویګانو څخه $a = x$ او

$b = y$ په لاس راځي. یعنې

$$x + \sqrt{y} = a + \sqrt{b} \Leftrightarrow x = a, y = b$$

ثبوت. فرض کړو چې x ، a سره مساوی نه دي، په هغه صورت کې
 $x = a + m$ او دا نتیجه د (۱) مرحلې له مخې امکان نه لري.

$$x = a + m \Rightarrow a + m + \sqrt{y} = a + \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{b} = m + \sqrt{y}$$

3. کله چې $\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ وي نو

$$\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y} \text{ دی.}$$

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \Rightarrow \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

ثبوت.

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \Rightarrow a + \sqrt{b} = x + y + 2\sqrt{xy}$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} a = x + y, \sqrt{b} = 2\sqrt{xy} \Rightarrow a - \sqrt{b} = x + y - 2\sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow a - \sqrt{b} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \Rightarrow \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y} \bullet$$

4. که چېرې $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ وي، په هغه صورت کې $a = x + y$ او

$b = xy$ یعنې

$$\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y} \Rightarrow a = x + y, b = xy \bullet$$

ثبوت.

$$a \pm 2\sqrt{b} = (\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2 = x + y \pm 2\sqrt{xy} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} a = x + y, b = xy \bullet$$

مثال 52. د $\sqrt{12 - 2\sqrt{35}}$ جذرالربع حساب کړئ؟

حل: که چېرې $\sqrt{12 - 2\sqrt{35}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ فرض شي نو باید $12 = x + y$ ،

$xy = 35$ ، $x = 7$ او $y = 5$ وي یعنې

$$\sqrt{12-2\sqrt{35}} = \sqrt{7+5-2\sqrt{7 \cdot 5}} = \sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2} = \sqrt{7}-\sqrt{5} \bullet$$

53 مثال. د $18-8\sqrt{5}$ دوهم جذر پیدا کړئ؟

حل:

$$\begin{aligned} 18-8\sqrt{5} &= 18-2 \cdot 4\sqrt{5} = 18-2\sqrt{16 \cdot 5} = 18-2\sqrt{80} \\ &= 10+8-2\sqrt{80} = (\sqrt{10})^2 - 2\sqrt{10 \cdot 8} + (\sqrt{8})^2 = (\sqrt{10}-\sqrt{8})^2 \\ \Rightarrow \sqrt{18-8\sqrt{5}} &= \sqrt{(\sqrt{10}-\sqrt{8})^2} = \sqrt{10}-\sqrt{8} \bullet \end{aligned}$$

54 مثال. د $\sqrt{48}-\sqrt{45}$ دوهم جذر پیدا کړئ؟

حل:

$$\begin{aligned} \sqrt{48}-\sqrt{45} &= \sqrt{3}(\sqrt{16}-\sqrt{15}) = \sqrt{3}(4-\sqrt{15}) = \sqrt{3}\left(\frac{8}{2}-\frac{2\sqrt{15}}{2}\right) \\ &= \sqrt{3} \cdot \frac{5+3-2\sqrt{15}}{2} = \sqrt{3} \cdot \frac{5+3-2\sqrt{5 \cdot 3}}{2} = \sqrt{3} \cdot \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{2} \\ \Rightarrow \sqrt{\sqrt{48}-\sqrt{45}} &= \sqrt{\sqrt{3} \cdot \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{2}} = \sqrt[4]{2} \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2} \left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}} \right) \bullet \end{aligned}$$

د کسرونو د منخرج ناطق کول

د کسرونو د منخرج د ناطق کولو څخه مقصد دا دی چې هغه کسر په لاس راشي کوم چې په منخرج کې جذر ونه لري او د اولنې کسر سره مساوي وي. په دی منظور لاندې حالتونه په نظر کې نیول کېږي.

اول. که چېرې د کسر منخرج د $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ حالت ولري. نو دهغې صورت او منخرج په $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ کې ضربوو.

دوهم. که چېرې د کسر منخرج $a \pm \sqrt{b}$ یا $a \mp \sqrt{b}$ سره ضربوو.

دریم. که چہرے د کسر منخرج د $a \pm \sqrt[3]{b}$ اویا $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$ حالت ولری. نو
اړونده مطابقونه

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

کارول کیږي.

مثالونه:

$$55. \quad \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}, \quad 56. \quad \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$57. \quad \frac{4}{\sqrt[3]{5}} = \frac{4 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \frac{4 \sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{4 \sqrt[3]{25}}{5}$$

$$58. \quad \frac{5}{x+2\sqrt{y}} = \frac{5}{x+2\sqrt{y}} \cdot \frac{x-2\sqrt{y}}{x-2\sqrt{y}} = \frac{5(x-2\sqrt{y})}{x^2-(2\sqrt{y})^2} = \frac{5x-10\sqrt{y}}{x^2-4y}$$

$$59. \quad \frac{8}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{8(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} = 8(\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

$$57. \quad \frac{2}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}} = \frac{2(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})}{x-y}$$

$$58. \quad \frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot (\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt[3]{2}-\sqrt{3})(\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}-3} = \frac{(\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+9)}{(\sqrt[3]{4}-3)(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+9)} \\ = \frac{(\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+9)}{4-27} = \frac{(\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+9)}{-23}$$

تمرینونه

1. د لاندې افادو څخه کومې افادې ته پولینوم ویل کېږي.

1. $y = x^3 - x^2 + 6x^{-2}$, 2. $z = 1 - x^8$, 3. $u = abx^2 - x + cx^2$

4. $P = (1 + 2x)^3$, 5. $Q = \frac{2x-8}{3x+6}$, 6. $R = \frac{x^2-5x+6}{x-2}$

د لاندې پولینومونو درجه معلومه کړئ.

7. $P = 1 + x^2 + 4x^3 - x$, 8. $Q = (1 - x^2)^2$, 9. $R = 1386$

لاندې پولینومونه په صعودی، نزولی او کاملو شکلونو ولیکئ.

10. $P = 4x^4 - 3 + 2x^3 - x$, 11. $Q = ax^2 + c + bx$, 12. $R = x^5 + x$

لاندې عملیې تر سره کړئ

13. $3x^2 + (y^2 - 4z) - (2x - 3y + 4z)$

14. $2(4xy + 3z) + 3(x - 2xy) - 4(z - 2xy)$

15. $4x^2 - [3x^2 - 2\{y(x - y)\} + 5xy - 2y^2]$

16. د $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 2yz$ ، $y^2 + z^2 - x^2 + 2yz - 2zx$ ، $z^2 + x^2 - y^2 + 2zx - 2xy$

افادې سره جمع کړئ؟

17. د $a + b + c - d$ افاده له $c - a + d - b$ افادې څخه تفریق کړئ؟

لاندې پولینومونه سره ضرب کړئ؟

18. $(-2ab^3)(4a^2b^5)$, 19. $(-3x^2y)(4xy^2)(-2x^3y^4)$

20. $(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)(x - y)$, 21. $(1 + x)^3$

د تقسیم عملیه په لاندې افادو کې تر سره کړئ؟

22. $\frac{24x^2y^3z}{4xyz^2}$, 23. $\frac{-16a^4b^6}{-8ab^2c}$, 24. $\frac{4a^3b^2 + 16ab - 4a^2}{-2a^2b}$

$$25. \frac{2x^4 + 3x^3 - x^2 - 1}{x - 2}, \quad 26. \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x - 1}$$

27. که چېرې د $P(x) = 7x^{10} - 3x^3 + 1$ پولینوم پر $x + 1$ تقسیم شي. نو د هغې باقیمانده د تقسیم د عملیې څخه پرته په لاس راوړئ؟

28. که چېرې $P(x) = x^2 - 4x + 9$ پر $x + c$ تقسیم شي او د هغې باقیمانده $R = 14$ وي نو د c عدد به څو وي؟

د ترکیبی تقسیم په استفادې سره د تقسیم دا لاندې عملیې تر سره کړئ؟

$$29. (x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8) \div (x - 2)$$

$$30. (6x^3 - 7x^2 + 1) \div (x - \frac{1}{3})$$

$$31. (x^5 + 32) \div (x - 2)$$

د الجبري مطابقتونو په استفاده لاندې د ضرب حاصلونه حساب کړئ؟

$$32. (ax - by^2)^2, \quad 33. \left(\frac{x}{3} + \frac{2y}{5}\right)\left(\frac{x}{3} - \frac{2y}{5}\right), \quad 34. (x^2 - 4x + 2)^2$$

$$35. (2x + y)^3, \quad 36. (a^2 - 3b^2)^3, \quad 37. (x + y - z)(x - y + z)$$

د الجبري مطابقتونه په مرسته لاندې افادې تجزیه کړئ؟

$$39. 9x^2 + 24xy + 16y^2, \quad 40. -xy - 2yz + 2xy^2$$

$$41. 2x(a + b) - 3y(a + b), \quad 42. x^4 - 9y^2z^6$$

$$43. 3x^5 - 48xy^4, \quad 44. 4x^2 + 4x + 1, \quad 45. a^2 - 8a + 12$$

$$46. x^2 + 10x + 16, \quad 47. x^3 + 1, \quad 48. 8x^3 - 1, \quad 49. x^3y^3 + z^3$$

$$50. ax^2 - x^2 - 5a + 5, \quad 51. 15 - x - 2x^2$$

$$52. 9x^2 - 145xy + 16y^2, \quad 53. 12x^2 + 32x + 21$$

لاندې عملې تر سره کړئ؟

$$\begin{aligned}
 54. & \frac{a^3 + b^3}{(a-b)^2 + ab}, & 55. & \frac{2x^2}{x^2 - y^2} + \frac{2x^2}{x^2 + xy} \\
 56. & \frac{x}{x+y} + \frac{x}{x-y} - \frac{2xy}{x^2 - y^2}, & 57. & \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right) \div \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) \\
 58. & \left(\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} \right) \left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{4} - x \right), & 59. & \frac{x^2 - y^2}{x} \cdot \frac{x+y}{x-y}
 \end{aligned}$$

دا لاندې کسرونو مخرونه ناطق کړئ؟

$$\begin{aligned}
 60. & \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}, & 61. & \frac{x+y}{\sqrt{x-y}}, & 62. & \frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{y}}, & 63. & 2x(x+y)^{\frac{1}{8}} \\
 64. & \frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}, & 65. & \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}, & 66. & 4(a-b)^{-\frac{3}{2}}
 \end{aligned}$$

مختلط عددونه

که هر څو تصور کېږي چې شاید حقيقي عددونه به د حسابونو اړتياوې رفع کړای شي مگر د مختلطو عددونو سبب په حقيقت کې د حقيقي عددونو د ست تعميم او (توسعه) دی.

نو د هغې سره سره چې په لومړي سر کې مبهم تصور کېږي خو د ریاضی او فزیک د مسایلو په شرح کولو، واضح کولو او ثبوت کولو کې زیات او څرگند

رول او ډیر اهمیت لري. دلته د مختلطو عددونو د نظرې لومړني مفاهیم په فشرده ډول طرح کيږي.

موهومي عددونه:

د ai ډوله عدد چې په هغې کې a یو حقیقی عدد او $i^2 = -1$ وي. په موهومي عدد سره نومول کيږي. د موهومي عددونو سېټ د تعریف سره سم په لاندې ډول واضح کيږي.

$$I = \{x : x = ai, a \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

د i عدد موهومي واحد نومیږي.

د مختلطو عددونو پیژندنه

د $z = x + yi$ عدد کوم چې x او y حقیقی عددونه او $i^2 = -1$ فرض شوی وي د مختلط عدد په نوم یادېږي. په دې ترتیب سره مختلط عددونه د موهومي او حقیقي عددونو د یوځای کولو څخه په لاس راځي، او د مختلطو عددونو سېټ عبارت دی له

$$\mathbb{C} = \{z : z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

x عدد ته حقیقي قسمت او y ته $z = x + yi$ موهومي قسمت وائي او لیکي چې

$$x := \operatorname{Re}(z), \quad y := \operatorname{Im}(z)$$

څرګنده ده چې د حقیقي عددونو او موهومي عددونو سېټونه د مختلطو عددونو د سېټ فرعي سېټونه دي. یعنې

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = x + 0i \in \mathbb{C}$$

$$\forall yi \in I \Rightarrow yi = 0 + yi \in \mathbb{C}$$

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \quad , \quad I \subset \mathbb{C}$$

د مختلطو عددونو تساوي.

دوه مختلط عددونه $z_1 = x_1 + y_1 i$ او $z_2 = x_2 + y_2 i$ یو تر بله سره مساوي دي. کله که د هغوی حقيقي قسمتونه سره مساوي او موهومي قسمتونه یې سره مساوي وي.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$$

د مختلطو عددونو جمع او تفریق

د $z_1 = x_1 + y_1 i$ او $z_2 = x_2 + y_2 i$ عددونو جمع او تفریق عبارت دي له

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + y_1 i) \pm (x_2 + y_2 i) = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2) i$$

1 مثال. د $z_1 = 4 + 5i$ و $z_2 = 2 + 3i$ لپاره لرو چې

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (4 + 5i) = 6 + 8i$$

$$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (4 + 5i) = -2 - 2i$$

د مختلطو عددونو ضرب.

د $z_1 = x_1 + y_1 i$ او $z_2 = x_2 + y_2 i$ عددونو ضرب د $i^2 = -1$ او الجبري قاعدو په نظر کې نیولو سره عبارت دی له

$$z_1 z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 x_2 i + y_1 y_2 i^2$$

$$\Rightarrow z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2) i$$

د مختلطو عددونو د ضرب په عملیه کې تبادلولي او اتحادي خاصیتونه صدق کوي چې ثبوت یې گران نه دی.

د i عدد توانونه

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i$$

$$i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad i^6 = -1, \quad i^7 = -i$$

$$i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i, \quad i^{4n} = 1$$

بنا پر دې د i هر طبعی توان یوله $i, 1, -i, -1$ او عددونو څخه دی.

د مختلط عدد مزدوج

د $z = x + yi$ عدد مزدوج د $\bar{z} = x - yi$ څخه عبارت دی. لیدل

کېږي چې

$$z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2$$

$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x = 2\operatorname{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi = 2\operatorname{Im}(z)$$

2 مثال. د $z = 3 + 4i$ عدد مزدوج له $\bar{z} = 3 - 4i$ څخه عبارت دی.

$$z\bar{z} = (3 + 4i)(3 - 4i) = 9 + 16 = 25$$

$$z + \bar{z} = (3 + 4i) + (3 - 4i) = 6$$

$$z - \bar{z} = (3 + 4i) - (3 - 4i) = 8i$$

د مختلطو عددونو تقسیم

د $z_1 = x_1 + y_1i$ پر عدد $z_2 = x_2 + y_2i$ باندې په لاندې ډول تقسیمېږي.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1i}{x_2 + y_2i} = \frac{(x_1 + y_1i)(x_2 - y_2i)}{(x_2 + y_2i)(x_2 - y_2i)} = \frac{x_1x_2 - x_1y_2i + y_1x_2i - y_1y_2i^2}{x_2^2 - y_2^2i^2}$$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2} i$$

3 مثال. د $z_1 = 2 - 3i$ عدد پر $z_2 = 1 + i$ عدد تقسیموو.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 3i}{1 + i} = \frac{(2 - 3i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{-1 - 5i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i.$$

د یو مختلط عدد مطلقه قیمت.

د $x + yi$ عدد مطلقه قیمت د تعریف سره سم عبارت دی له

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

د مختلطو عددونو د مطلقه قیمت خاصیتونه

که چېرې z_1 او z_2 دوره حقیقي عددونه وي نو د لاندې رابطو صحت (سموالی) ارزیابی کړئ.

$$1. |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|, \quad 2. |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$3. |z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|, \quad 4. |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$5. \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$$

4 مثال. د $z = 3 + 4i$ عدد مطلقه قیمت پیدا کړئ.

$$\sqrt{z} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

د مختلطو عددونو الجبري خاصیتونه

1. $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow z_1 + z_2 \in \mathbb{C}, z_1 z_2 \in \mathbb{C}$ د ترتوب خاصیت
2. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, z_1 z_2 = z_2 z_1$ تبدیلی
3. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$ اتحادي
4. $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ توزیعی
5. $z + 0 = 0 + z = z, 1 \cdot z = z \cdot 1$ عینیت
6. $z + (-z) = 0, z \cdot z^{-1} = 1, z \neq 0$ معکوس عناصر

د مختلطو عددونو گرافیکي ښودنه (ارائه)

يو مختلط عدد $z = x + yi$ کیدلی شي په مستوي کې د قایمو مختصاتو په نظر کې نیولو سره د یوې نقطې په توګه په نظر کې ونیول شي. په داسې ډول چې په هغې کې حقیقي محور افقي او موهومي محور عمودي نومول کیږي. په دې توګه د هر مختلط عدد لپاره د مستوي پر مخ یو نقطه او د مستوي د هرې نقطې لپاره یو $z = x + yi$ مختلط عدد تقابل کوي.

د حقیقي عددونو سټ د x پر محور او د موهومي عددونو سټ د y پر محور موقیعت اخلي.

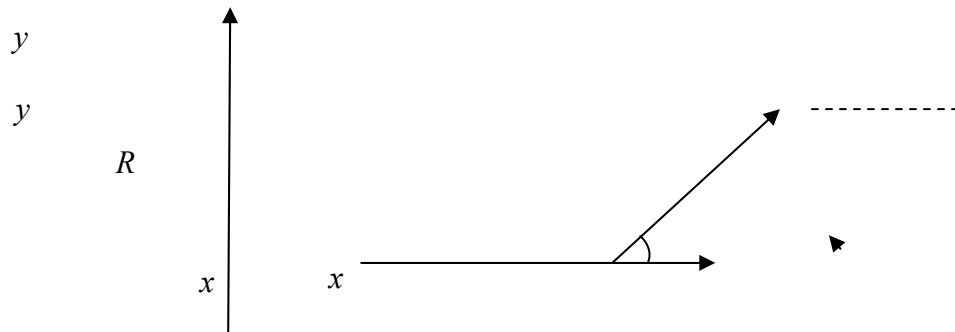
اوس کولی شو د $z = x + yi$ عدد د یوې نقطې $P(x, y)$ په توګه په قطبي مختصاتو کې په نظر کې ونیسو. (شکل 1).

د θ زاویه چې $\overline{OP}$ هغه د x محور د مثبت جهت سره جوړه وي د z مختلط عدد شاخص l په نامه او د $\overline{OP}$ اوږدښت د z د بعد 2 (مقدار په نوم یادوي). له شکل څخه په څرګنده لیدل کیږي چې

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

په دې ترتیب سره $r = |z|$ او د θ د معلوماتو لپاره د x او y اشارې باید په نظر کې ونیول شي. طبیعي ده چې x او y د r او θ له جنسه معلومیدلی شي.

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$



په دې ترتیب که x او y د r او θ له جنسه عوض شي نو لرو چې

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

دې حالت ته د z عدد قطبي اړانه (ښودنه) وایي.

5 مثال. د $z = 2 + 2i$ عدد په قطبي شکل ولیکي

حل. واضح ده چې

$$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

$$z = 2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

6 مثال. د $z = 3 + \sqrt{3}i$ قطبي حالت وليکئ؟

$$r = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \quad \text{او} \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow z = 3 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

د مختلطو عددونو ضرب

دوه مختلط عددونه

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \text{ و } z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

په ساده ډول ضربوو

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1) i] \\ &\Rightarrow z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

وروستنی رابطه کیدلی شي د n مختلطو عددونو لپاره تعمیم کړای شي او هم ددې رابطې څخه د مختلطو عددونو توانونه په ښه توګه حسابیدلی شي.

د $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ عدد لپاره لرو چې

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$z^2 = r^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\boxed{z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)}.$$

نتیجه. که چپری د $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ مختلط عدد په نظر کې ونیول شي لرو چې

$$z^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n \dots \quad (I)$$

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \dots \quad (II)$$

د (I) او (II) څخه په لاس راځي چې

$$\boxed{(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta}$$

او دا رابطه د موآوری² په نامه یادېږي.

7 مثال. په قطبي شکل کې د $(1+i)^{12}$ ضرب حساب کړئ؟

حل. $z = 1+i$ په قطبي شکل راوړو.

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad \text{و} \quad \tan \theta = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

$$\Rightarrow 1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

لهذا

$$(1+i)^{12} = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^{12} = (\sqrt{2})^{12} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^{12}$$

$$= 64 \left(\cos \frac{12\pi}{4} + i \sin \frac{12\pi}{4} \right)$$

$$\Rightarrow (1+i)^{12} = 64(\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = 64(-1 + i.0) = -64$$

². de Moivre Abraham (1667 – 1754)

پہ قطبی حالت کی د مختلطو عددونو تقسیم (ویش)

د $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ عدد پر $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ باندی تقسیم کریں۔

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2)}{\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2} \\ \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] \end{aligned}$$

8 مثال. د قطبی حالت خنہ پہ استفادہ $\left(\frac{-1+i}{1+i}\right)^{12}$ حساب کریں۔

$$-1+i : r = \sqrt{2}, \tan \theta = \frac{1}{-1} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow -1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$1+i : r = \sqrt{2}, \tan \theta = \frac{1}{1} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{-1+i}{1+i} = \frac{\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} = \cos \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{-1+i}{1+i} = \cos \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right)$$

بناپر دی

$$\left(\frac{-1+i}{1+i} \right)^{12} = \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right)^{12} = \cos \left(\frac{12\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{12\pi}{2} \right)$$

$$= \cos(6\pi) + i \sin(6\pi) = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

تمرین

لاندی افادی محاسبہ کریں؟

1. $(2 + 3i) + (3 - 2i)$, 2. $(2 + 3i)(2 - 3i)$
3. $(4 + i)(3 + 2i)(1 - i)$, 4. $(2 - i)^2$
5. $\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^2 - 2 \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^2$, 6. $\frac{(2i)^3 + i^{25}}{2i - 1}$

لاندی مختلط عددونہ پہ قطبی شکل ولیکی

7. $2 - 2i$, 8. $-7i$, 9. $(1 - i)^2$, 10. i^{25}

د $z_2 = 5 - 2i$ و $z_1 = 2 + 3i$ لپاره لاندې عددونه محاسبه کړئ.

$$11. \quad z_1 \overline{z_1} \quad , \quad 12. \quad z_1^2 \quad , \quad 13. \quad (\overline{z_1})^2$$

$$14. \quad z_1 + z_2 \quad , \quad 15. \quad z_1^2 - 2z_2^2 \quad , \quad 16. \quad (\overline{z_1})^3 + (\overline{z_2})^3$$

لاندې مختلط عددونه له قطبي شکل څخه د $z = x + yi$ په شکل ولیکئ.

$$17. \quad z = 5(\cos \pi + i \sin \pi) \quad , \quad 18. \quad z = 3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$19. \quad z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad , \quad 20. \quad z = 6 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$



پنځم څپرکی

معادلې او نامساوی گانې

د معادلې کلمه د تعادل، مساوات، برابری، هم وزنه او داسې نورو په معنا ده د الجبر په اصطلاح کې معادله د دوو الجبري افادو د تساوی څخه عبارت دی. په یوه معادله کې هغه حرفونه چې د هغوی د قیمت معلومول مطلب وي د مجهولونو (*unknowns*) په نامه یادېږي. که چېرې په یو مساوات کې د مجهولونو د ځینو معینو قیمتونو لپاره، د تساوي شرط صدق کړي. هغې ته مشروط مساوات یا معادله وایې. مګر که د ځینو خاصو مواردو څخه پرته د مجهولونو د ټولو قیمتونو لپاره مساوات برقرار وي، نو هغې مساوات ته مطابقت یا عینیت *Identify* وایې. د مثال په توګه $2x + 4 = 14$ یوازی د $x = 5$ لپاره صدق کوي. نو دا یوه معادله ده. خو د $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$ مساوات د x د هر قیمت لپاره صدق کوي او یو مطابقت دی. په همدې ډول تساوی د $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{2x}{x^2-4}$ تساوی د $x = \pm 2$ څخه پرته د x د ټولو قیمتونو لپاره صدق کوي نو دا مساوات یو مطابقت دی.

د معادلې جذر. د متحول هغه قیمتونه چې معادله صدق کړي دهغې معادلې د جذرونو یا حلونو په نامه یادېږي. د مثال په توګه د $x = 2$ عدد د $3x + 4 = 10$ معادلې جذر او $x = \pm 5$ دوه عددونه د $x^2 = 25$ معادلې جذرونه دي.

د یوې معادلې درجه که چېرې د معادلې خواوې د یو پولینوم شکل ولري. نو د په هغې کې د هغې مجهول لوړ توان د نوموړي معادلې درجې په نامه یادوي. د مثال په توګه د $4x - 6 = 5$ د معادلې درجه یوه ده او $x^2 - 6x = -8$ د معادلې درجه دوه ده.

معادلې معادلې. هغه معادلې چه عین جذرونه ولري. یو تر بله معادلې معادلې بلل کېږي. د مثال په توګه د $2x - 8 = 0$ او $x - 4 = 0$ معادلې سره معادلې دی. په همدې ډول د $x^2 - 9 = 0$ ، $(x - 3)(x + 3) = 0$ معادلې یو تر بله سره معادلې دي.

د معادلو خاصیتونه

۱. که چېرې د یوې معادلې دواړو خواو ته یو عدد جمع شي معادله پر ځای پاته کېږي.
۲. که چېرې د یوې معادلې له دواړو خواو څخه یو عدد تفریق شي تعادل پر ځای پاته کېږي.
۳. که چېرې د یوې معادلې دواړه خواوې په یو عدد ضرب شي تعادل نه بدلیږي.
۴. کیدلای شي د یوې معادلې دواړه خواوې د صفر خلاف په یو عدد باندې تقسیم شي خو تعادل نه بدلیږي.
۵. که چېرې د یوې معادلې دواړه خواوې د یو طاق عدد په توان رفع شي مساوات په ځای پاته کېږي.

٦. که چبرې د معادلې دواړه خواوې په یو معینه مرتبه جذر ونيول شي تعادل بدلون نه کوي.

٧. که چبرې د یوې معادله دواړه خواوې (د صفر د حالت څخه پرته) معکوس شي، تعادل په خپل ځای پاته کیږي.

د معادلو د حل طریقې (روښونه)

د یوې معادلې د جذرونو د په لاس ته راوړلو لپاره. پورتنی اوه ګوني عملونه مرحله په مرحله پرې عملي کیږي نو هر ځل یوه ساده او د مخکښې معادلې سره معادله یوه معادله په لاس راځي. او په نهایت کې د هغې جذر په ګوته کیږي. په عمومي توګه د یوې لومړۍ درجې معادلې د حل لپاره لاندې عملونه سرته کوو.

1. که چبرې په معادله کې د ضرب، تقسیم او توان عمليې شاملې وي نو لومړی هغه عملونه سرته رسوو.

2. که چبرې معادله کسري افادې ولري. نو دواړه خواوې یې د مخرجونو د تر ټولو کوچنی مشترک مضرب په وسیله ضربوو.

3. مجهولې افادې یوې خوا او معلومې افادې یې مخامخ لوری ته اړوو.

4. دواړو خوا ته مشابه حدونه ور جمع کوو.

5. دواړو خواوې د مجهول پر ضریب تقسیموو.

د معادلو ډولونه د درجې او د مجهولونو د تعداد له مخې

معادلې د درجې او د مجهولونو د تعداد له مخې په لاندې ډول صنف بندې کیږي.

لومړۍ درجه یو مجهوله معادلې. هغه معادلې دي چې په هغې کې یوازې یو مجهول وجود ولري او د معادلې درجه هم یوه وي. په معموله توګه لومړۍ درجې معادلو ته خطي معادلې هم وايي.

د څو مجهوله لومړې درجې معادلو سیستم. هغه معادلې چې په هغې کې دوه مجهوله، درې مجهوله، څلور مجهوله او داسې نور موجود وي په ترتیب سره دوه مجهوله، څلور مجهوله او داسې نورو په نامه یادېږي. په معموله توګه دا ډول معادلې چې څو مجهوله ولري څو معادلې هم وي نو ځکه یې د څو مجهوله معادلو د سیستم په نامه یادوي.

که د مجهولونو او معادلو تعداد سره مساوی وي نو هغې سیستم ته مربعي سیستم هم وايي.

د لوړو درجو لرونکي معادلې. هغه معادلې چې په درجې کې دوه، درې، څلور، پنځه او داسې نور وي. دا ډول معادلې هم د څو مجهوله او د څو معادلو سیستمونه کیدلی شي.

د هغوی څخه ډیرې معمولي همغه دوه درجه یې معادلې دي.

لومړۍ درجه یو مجهوله معادلې

لومړۍ درجه یو مجهوله معادله په نهایت کې د $ax + b = 0$ شکل لري. چې په هغې کې a او b حقيقي عددونه، $a \neq 0$ وي او دا معادله په لاندې ډول حل کېږي.

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax + b + (-b) = 0 + (-b) \Rightarrow ax = -b$$

$$\Rightarrow (ax)\left(\frac{1}{a}\right) = (-b)\left(\frac{1}{a}\right) \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

په دې ترتیب سره د معادلې جذر د $x = -\frac{b}{a}$ څخه عبارت دی. په عمومي توګه د یوې درجه یې معادلو د حل لپاره لاندې عملونه تر سره کوو.

1. که چبرې په معادله کې د ضرب، تقسیم او توان عملیې شاملې وي، نو لومړی موږ همغه اعمال تر سره کوو.
2. که چبرې معادله کسري افادې ولري، نو د معادلې دواړه خواوې، د هغې د مخرجونو په تر ټولو کوچني مشترک مضرب کې ضربوو.
3. معلومې افادې یوې خواته او مجهولې افادې بلې خواته وړو.
4. د دواړو خواوو جملې سره جمع کوو.
5. دواړه خواوې د مجهول پر ضریب تقسیموو.

مثالونه.

$$\begin{aligned}
 1. \quad & 2(x+3) = 3(x-1) \Rightarrow 2x+6 = 3x-3 \\
 & \Rightarrow 2x+(-3x)+6 = 3x+(-3x)-3 \\
 & \Rightarrow -x+6 = -3 \Rightarrow -x+6+(-6) = -3+(-6) \\
 & \Rightarrow -x = -9 \Rightarrow (-x)(-1) = (-9)(-1) \Rightarrow x = 9 \\
 2. \quad & \frac{x}{3} + \frac{x}{2} = 5 \Rightarrow 6\left(\frac{x}{3} + \frac{x}{2}\right) = 6 \cdot 5 \Rightarrow 2x+3x = 30 \\
 & \Rightarrow 5x = 30 \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)(5x) = \left(\frac{1}{5}\right) \cdot 30 \Rightarrow x = 6. \\
 3. \quad & \frac{3x}{2} + 4 = \frac{2x}{3} + \frac{3}{4} \Rightarrow 12\left(\frac{3x}{2} + 4\right) = 12\left(\frac{2x}{3} + \frac{3}{4}\right) \\
 & \Rightarrow 18x+48 = 8x+9 \Rightarrow 10x = -39 \Rightarrow x = -\frac{39}{10}
 \end{aligned}$$

4 مثال. د $\frac{x-7}{4} + \frac{x+10}{21} + 1 = \frac{5x-7}{8} - \frac{9x+6}{35}$ حل کړئ.

حل: اڅر چې کولی شو د معادلې دواړه خواوې د هغې د منځونو په مشترک منځ ضرب کړو او معادله په غیر کسري شکل واړوو او بیا یې حل کړو. مگر کله بیا امکان لري چې د څو مرحلو په ترڅ کې عملیه اسانه شي. په دې ترتیب د معادلې دواړه خواوې په 8 ضرب کولی شو. لرو چې

$$2x - 14 + \frac{8x + 80}{21} + 8 = 5x - 7 - \frac{72x + 48}{35} \Rightarrow \frac{8x + 80}{21} + \frac{72x + 48}{35} = 3x - 1$$

$$\Rightarrow (3 \times 7 \times 5) \left(\frac{8x + 80}{21} + \frac{72x + 48}{35} \right) = (3 \times 7 \times 5)(3x - 1)$$

$$\Rightarrow 40x + 400 + 216x + 144 = 315x - 105 \Rightarrow 544 + 105 = 315x - 256$$

$$\Rightarrow 649 = 59x \Rightarrow x = \frac{649}{59} \Rightarrow x = 11$$

5 مثال. د $\frac{6x - 3}{2x + 7} = \frac{3x - 2}{x + 5}$ معادله حل کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې د منځونو پر ټولو کوچني مشترک مضرب $(2x + 7)(x + 5)$ باندې ضربوو په لاس راوړو چې

$$(6x - 3)(x + 5) = (3x - 2)(2x + 7) \Rightarrow 6x^2 + 27x - 15 = 6x^2 + 17x - 14$$

$$\Rightarrow 10x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{10}$$

د مطلقه قیمت لرونکي معادلې

دا ممکنه ده چې په یوه معادله کې د ځینو افادو مطلقه قیمت مطرح شي. نو کله چې مطلقه قیمت رفع کوو، دوه حالتونه تر مناقشې لاندې راځي. دلته اسانه نمونې تر بحث لاندې نیسو.

6 مثال. $|2x - 3| = 7$ حل کړئ؟

حل: دلته $|2x - 3|$ دوه حالتونه لري. یا $2x - 3 > 0$ یا $-(2x - 3) > 0$ دی. بنا پر دې

$$|2x - 3| = 7 \Rightarrow 2x - 3 = \pm 7 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 7 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5 \\ 2x - 3 = -7 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

نو معادله دوه حلونه $x=5$ او $x=-2$ لري.

7 مثال. د $|3x - 12| + 8 = 17$ معادله حل کړئ؟

حل:

$$|3x - 12| + 8 = 17 \Rightarrow |3x - 12| = 9 \Rightarrow 3x - 12 = \pm 9 \Rightarrow 3x = 12 \pm 9$$

$$x = \frac{12 \pm 9}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{21}{3} = 7, x_2 = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow x_1 = 7, x_2 = 1$$

يعنی د 1 او 7 عددونه ددې معادلې حلونه دي.

هغه جذر لرونکي معادلې چه په اوله درجه معادلو اړول کيدای شي

هغه معادلې چې په هغې کې ځينې افادې تر جذر لاندې (غير ناطقې) وي. نو د هغې دواړو خواوو د مربع کولو په صورت کې داسې چې جذر د معادلې په يوه خوا کې وي کيدلی شي په يوه عادي معادله واپړول شي. په دې صورت کې له حل وروسته، ټول لاس ته راغلي حلونه په اصل معادله کې امتحان کېږي. دلته يوازې د جذري معادلې هغه حالت مطرح کېږي چې هغه په يوه اوله درجه معادله واپړی.

8 مثال. د $\sqrt{x + 3} = 8$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\sqrt{x + 3} = 8 \Rightarrow (\sqrt{x + 3})^2 = 8^2 \Rightarrow x + 3 = 64 \Rightarrow x = 61$$

بنا پر دې د معادلې حل 61 دی.

9 مثال. د $\sqrt{2x - 3} + 5 = 2$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\begin{aligned}\sqrt{2x-3} + 5 = 2 &\Rightarrow \sqrt{2x-3} = -3 \Rightarrow (\sqrt{2x-3})^2 = (-3)^2 \\ &\Rightarrow 2x-3 = 9 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6\end{aligned}$$

اوس که د $x = 6$ قیمت په معادله کې وضع شي هغه نه صدق کوي. نو دا معادله حل نه لري.

10 مثال. د $\sqrt{2x-3} = \sqrt{3x+4}$ معادله حل کړئ؟

حل:

$$\begin{aligned}\sqrt{2x+3} = \sqrt{3x+4} &\Rightarrow (\sqrt{2x+3})^2 = (\sqrt{3x+4})^2 \\ &\Rightarrow 2x+3 = 3x+4 \Rightarrow 2x-3x = 4-3 \Rightarrow x = -1\end{aligned}$$

د $ax+b$ افادې د علامې معلومول

د $ax+b$ افادې د علامې د معلومولو څخه مطلب. د x متحول د قیمتونو معلومول دي چې د هغې لپاره ددې افادې قیمت مثبت، منفي یا صفر شي. ددې افادې د علامې د معلومولو لپاره د $ax+b=0$ معادلې حل یعنی $x = -\frac{b}{a}$ په نظر کې نیسو. لومړی د x هغه قیمت پیدا کوو چې نوموړی افاده صفر کړي. یعنی

$$ax+b=0 \Rightarrow ax=-b \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$$

اوس که $a > 0$ وي نو د افادې اشاره د $x = -\frac{b}{a}$ ښی خواته مثبت او چپ خواته منفي دی. او که $a < 0$ وي نو دا خاصیت برعکس دی.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	∞				
$ax+b$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$

يعني د $x \in (-\frac{b}{a}, \infty)$ لپاره د افادې اشاره مثبت او $x \in (-\infty, -\frac{b}{a})$ لپاره ددی افادې علامه منفي ده.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	∞						
$ax+b$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$

نو د $x \in (-\frac{b}{a}, \infty)$ لپاره د افادې اشاره منفي او د $x \in (-\infty, -\frac{b}{a})$ لپاره د هغې اشاره مثبت دی.

11 مثال. د $2x-8$ افادې اشاره معلومه کړئ؟

$$2x-8=0 \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow x=4$$

څرنگه چې $a=2>0$ دی نو

x	$-\infty$	4	∞						
$2x-8$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$

$$x \in (-\infty, 4) \Rightarrow 2x-8 < 0, \quad x \in (4, \infty) \Rightarrow 2x-8 > 0$$

12 مثال. د $-3x-18$ افادې اشاره معلومه کړئ؟

حل:

$$-3x-18=0 \Rightarrow -3x=18 \Rightarrow x=-6$$

بناپر دې

x	$-\infty$	-6	∞						
$-3x-18$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$

$$x \in (-\infty, -6) \Rightarrow -3x-18 < 0, \quad x \in (-6, \infty) \Rightarrow -3x-18 > 0$$

لومړۍ درجه نامساوي ګانې

د لومړۍ درجه نامساوي عمومي حالت عبارت دی له

$$ax + b \geq 0 \quad , \quad ax + b > 0$$

$$ax + b \leq 0 \quad , \quad ax + b < 0$$

ددې نامساويګانو د حل څخه مطلب د x لپاره د هغو قيمتونو پيدا کول دي چې د هغوی لپاره نامساوي صدق شي.

13 مثال. د $4x + 9 \leq 3$ نامساوي حل کړئ؟

حل:

$$4x + 9 \leq 3 \Rightarrow 4x + 9 - 9 \leq 3 - 9 \Rightarrow 4x \leq -6$$

$$\Rightarrow 4x \leq -6 \Rightarrow x \leq -\frac{3}{2}$$

يعنې د $x \in \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$ لپاره پورتنۍ نامساوي درسته ده.

14 مثال. د $-4x + 20 > 0$ نامساوي حل کړئ؟

حل:

$$-4x + 20 \leq 0 \Rightarrow -4x + 20 > 0 \Rightarrow -4x > -20$$

$$\Rightarrow -4x > -20 \Rightarrow x < \frac{-20}{-4} \Rightarrow x < 5$$

نو د $x \in (-\infty, 5]$ لپاره پورتنۍ نامساوي صدق کېږي.

هغه نامساويګانې چې مطلقه قيمت لري

معادلو ته ورته، په نامساويگانو کې هم مطلقه قيمت مطرح کيدلی شي، چې بيا هم د مطلقه قيمت لرونکي هره افاده دوه حالته لري. په دې لړ کې لومړی درجه نامساوي گانو ته چې مطلقه قيمت لري اشاره کيږي او هغه په دې ډول دي.

$|ax + b| < c$, $|ax + b| \leq c$, $|ax + b| > c$, $|ax + b| \geq c$
په داسې حال کې چې a او b حقيقي ثابت عددونه او c مثبت عدد دی. دا هر يوه له دې څلورو نامساوي گانو څخه بيا مضاعفی نامساوي گانې په ځان کې لري. او په لاندې ډول دي.

$\pm(ax+b) < c$, $\pm(ax+b) \leq c$, $\pm(ax+b) > c$, $\pm(ax+b) \geq c$
ددې فرضيې پر بناکولی شو ځانگړي مسئلې حل کړو.

15 مثال. د $|5x - 15| < 10$ نامساوی حل کړئ؟

حل:

$$\begin{aligned} |5x - 15| < 10 &\Rightarrow \pm(5x - 15) < 10 \\ \Rightarrow \begin{cases} 5x - 15 < 10 \Rightarrow 5x < 25 \Rightarrow x < 5 \\ -(5x - 15) < 10 \Rightarrow 5x - 15 > -10 \Rightarrow x > 1 \end{cases} &\Rightarrow 1 < x < 5 \end{aligned}$$

نو ددې نامساوي د حلونو ست عبارت دی له $(1, 5)$ انترول څخه.

16 مثال. د $|5x - 15| \geq 10$ نامساوي حل کړئ؟

حل:

لومړی طريقه: که مخکېنۍ مثال و کاروو ددې نامساوي حل د x د قيمتونو د هغې ناحيې څخه عبارت دی چې د $|5x - 15| < 10$ نامساوي صدق نه کړی. يعنې د $(1, 5)$ انترول څخه نه وي. نو مطلوب حل عبارت دی له

$$(-\infty, 1] \cup [5, \infty)$$

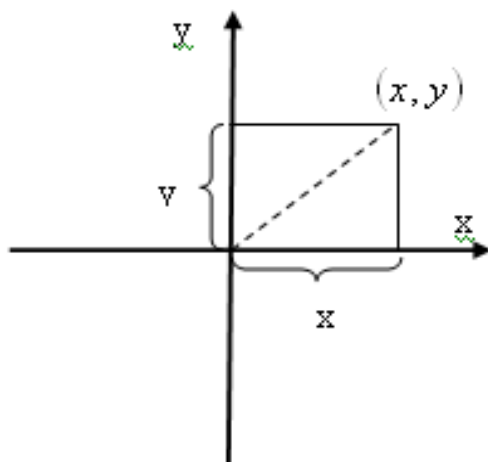
دوهمه طریقه: د پورتنی مثال په ډول

$$|5x - 15| \geq 10 \Rightarrow \pm(5x - 15) \geq 10 \Rightarrow 5x - 15 \geq 10 \vee -(5x - 15) \geq 10 \\ \Rightarrow 5x \geq 25 \vee -5x \geq -5 \Rightarrow x \geq 5 \vee x \leq 1 \Rightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [5, \infty)$$

د قایمو مختصاتو سیستم

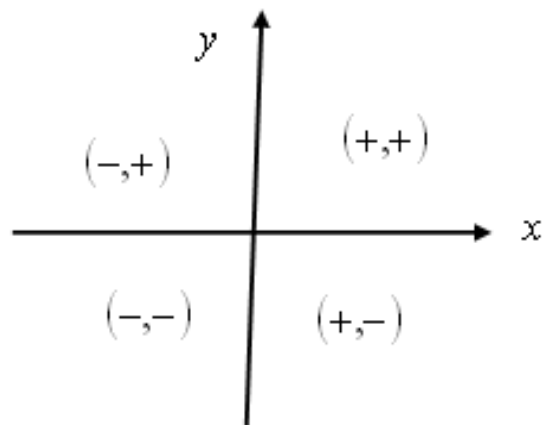
دوه د حقیقی عددونو محورونه چی په عمودي ډول یو تر بل سره قطع کوي په نظر کې نیول کیږي. د هغوی د تقاطع نقطه د مبدا په توګه خو په افقي او عمودي محورونو کې بنی خوا او پورته خوا مثبت جهته (شکل 1) وي. که چېرې p د مستوی یوه اختیاری نقطه وي. نو د P څخه د عمودي او افقي محورونو سره دوه موازی خطونه رسم کوو. دا خطونه افقی محور د x په نقطه او عمودی محور د y په نقطه کې قطع کوي. په دې ترتیب د P نقطه د یوې جوړې حقیقی عددونو (x, y) سره مطابقت کوي چې د P د قایمو مختصاتو په نامه یادېږي. دلته x عدد ته د P فاصله او y ته د P ترتیب وائي. بنا پر دې د هرې جوړې حقیقی عددونو سره د مستوی یوه نقطه او برعکس د مستوی د هرې نقطې سره یو جوړه حقیقی عددونه تړي.

پورتنی د محورو دستگاه د قایمو مختصاتو سیستم یا کارترین سیستم بولي.



دوې نقطه (x_1, y_1) او (x_2, y_2) یو تر بله سره مساوي بلل کېږي. که چېرې $x_1 = x_2$ او $y_1 = y_2$ وي.

د قایمو مختصاتو سیستم یوه مستوي په څلورو ناحیو ویشي چه هره ناحیه د یوې قایمې زاوې په وسیله تشخیص کېږي. او د ساعت د عقربې په خلاف په ترتیب سره په اوله، دومه، دریمه او څلورمه ناحیه نومول کېږي. د نقطو د مختصاتو علامې په دې ناحیو کې په ترتیب سره $(+, +)$ ، $(-, +)$ ، $(-, -)$ ، $(+, -)$ وي.



د یو مستقیم خط معادله.

د قایمو مختصاتو په سیستم کې د هغو نقطو (x, y) سټ چې یوه دوه مجهوله یو درجه یي معادله صدق کړي یو مستقیم خط دی. همدا وجه ده چه یو ی لومړی درجې دوه مجهوله معادلې ته خطی معادله وائي. هره خطی معادله په یو له دې دوه شکلونو لیکل کېږي.

$$y = ax + b \quad , \quad Ax + By + C = 0$$

د هغې زاوې $tangent$ چې د $y = ax + b$ مستقیم خط یې د افقی محور سره جوړ وي د α عدد دی او هغه د نوموړی مستقیم خط د میل په نامه یادوي. یعنې $\tan \alpha = a$ د $y = ax + b$ مستقیم خط میل دی.

16 مثال. د $y = x - 8$ مستقیم خط د افقی محور سره څو درجې زاویه جوړوي؟
حل: که چېرې α مطلوبه زاویه وي نو

$$\tan \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

د مستقیمو خطونو موازی والی او عمودیت

دوی خطی معادله $\begin{cases} y = m_1x + b_1 \\ y = m_2x + b_2 \end{cases}$ دوه مستقیم خطونه ارائه کوي او دا مستقیم خطونه درې حالت لری شي

اول. دا مستقیم خطونه یو تر بله سره موازي دي که چېرې $m_1 = m_2$ وي.

دوهم. دا مستقیم خطونه سره عمودي دي که چېرې دواړه معادلې یو شان وي.

دریم. دا مستقیم خطونه سره منطبق دي که چېرې دواړه معادلې یو شان وي.

17 مثال. د لاندې سیستمونو اړونده مستقیم خطونه یو تر بله سره څه مناسبت لري؟

$$(i) \begin{cases} y = \frac{3}{4}x + 6 \\ y = -\frac{4}{3}x + 1 \end{cases}, \quad (ii) \begin{cases} y = 2x - 7 \\ y = 2x + 9 \end{cases}$$

$$(iii) \begin{cases} y = 3x + 5 \\ 2y = 6x + 10 \end{cases}, \quad (iv) \begin{cases} x + 2y = 6 \\ y = -\frac{1}{2}x + 9 \end{cases}$$

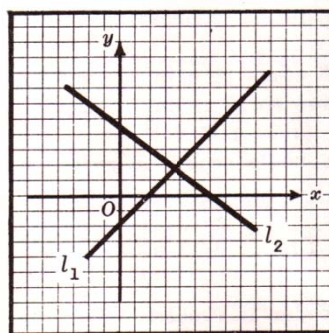


Fig. 1(a)

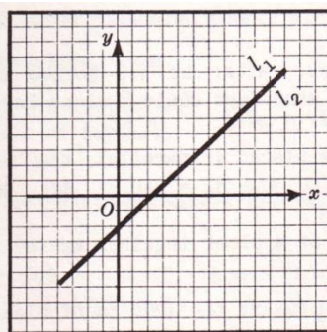


Fig. 1(b)

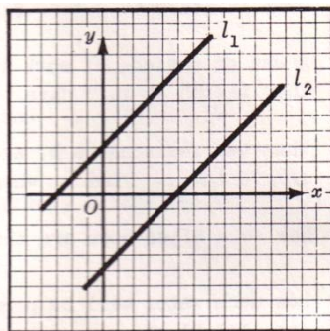


Fig. 1(c)

حل: په (i) کې $m_1 m_2 = \frac{3}{4} \left(-\frac{4}{3}\right) = -1$ دی نو مستقیم خطونه یو تر بل سره عمود دي.

په (ii) حالت کې لرو چې $m_1 = 2 = m_2$ نو مستقیم خطونه یو تر بله سره موازی دي، په (iii) حالت کې که د دوهمی معادلې دواړه خواوې پر 2 تقسیم شي نو لومړی معادله په لاس راځي نو دواړه معادلې یو شان دي او مستقیم خطونه سره منطبق دي.

په (vi) حالت کې معادلو ته د شکل تغیر ورکړو لرو چې

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ y = -\frac{1}{2}x + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y = -\frac{1}{2}x + 9 \end{cases} \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{2} = m_2$$

نو مستقیم خطونه سره موازی دی.

د دوه مجهوله خطي معادلو سیستم

د یو دوه مجهوله خطي معادلو سیستم په عمومي توګه لاندې شکل لري.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

واضح ده چې دا سیستم دوه خطي معادلې دي. او طبعاً دوه مستقیم خطونه کیدلی شي موازی، متقاطع او یا سره منطبق وي. دا سیستم ته په لاندې ډول د شکل تغیر ورکوو.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1y = -a_1x + c_1 \\ b_2y = -a_2x + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1} \\ y = -\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2} \end{cases}$$

کله چې دا مستقیمونه سره متقاطع وي یعنی سره موازی نه وي، په بل عبارت یو تر بله مختلف میلانونه ولري نو دا سیستم یو حل لري. په دې صورت کې

$$m_1 \neq m_2 \Rightarrow -\frac{a_1}{a_2} \neq -\frac{b_1}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \Leftrightarrow a_1b_2 \neq a_2b_1 \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

که چېرې مستقیم خطونه سره موازی وي (متقاطع نه وي) نو سیستم حل نه لري. په دې صورت کې

$$m_1 = m_2 \Rightarrow -\frac{a_1}{a_2} = -\frac{b_1}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \Leftrightarrow a_1b_2 = a_2b_1 \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

یو سیستم نامتناهي حلونه لري، که چېرې دواړه معادلې یې یو تر بله سره منطقي وي. یعنی متناسب ضریبونه ولري. په دې ترتیب هغه شرایط عبارت دي له:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \quad \text{د تقاطع شرط د یکتا(یوازی یو) حل موجودیت}$$

د حلونو د نه موجودیت (موازی والي) شرط

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

د انطباق شرط (د بی نهایت حلونو درلودل)

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

د دوه مجهوله خطي معادلو د سیستم د حل څخه مطلب د هغې حقیقی عددونو جوړې (x, y) پیدا کول دي چې دواړه معادلې همزمان صدق کړي. څرنګه چې کیدلای شي دوه مستقیم خطونه یو تر بله موازي، منطبق او یا متقاطع وي. نو سیستم یوازې یو حل لري کله که نوموړی مستقیم خطونه یو تر بله سره قطع کړي، نامتناهي حلونه لري که چېرې هغه سره منطبق وي او حل نه لري که چېرې هغه سره موازی وي.

د افنا په طریقه د دوه مجهوله معادلو د سیستم حل

په دې طریقه کې د یوې معادلې دواړه خواوې په یو عدد کې ضربیږي ترڅو د په نظر کې نیول شوي مجهول ضریب د بلې معادلې د همغه مجهول د ضریب سره یو شان او بیا دواړه معادلې سره جمع یا تفریق کيږي، په نتیجه کې مربوطه مجهول حذف کیږي او یوه معادله په یو مجهول کې په لاس راځي. د هغې د حل څخه وروسته د یو مجهول قیمت په لاس راځي، بیا دا قیمت ددې دوو اولنیو معادلو څخه په یوه معادله کې ږدو او په دې ترتیب د هغه بل مجهول قیمت هم په لاس راځي. دا طریقه په عمومي حالت باندې تطبیق کیږي.

19 مثال. د
$$\begin{cases} 3x - 2y = 7 & \dots (I) \\ 5x - y = 21 & \dots (II) \end{cases}$$
 معادلو سیستم حل کړئ؟

حل: د (II) رابطې دواړه خواوې په 2 - ضربوو او د (I) رابطې سره ئې طرف په طرف جمع کوو.

$$-2 \begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 5x - y = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 3x - 2y = 7 \\ -10x + 2y = -42 \\ \hline -7x = -35 \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{-35}{-7} \Rightarrow x = 5$$

اوس $x = 5$ په (I) معادله کې ږدو نو y په لاس راځي.

$$3 \cdot 5 - 2y = 7 \Rightarrow -2y = 7 - 15 \Rightarrow -2y = -8 \Rightarrow y = \frac{-8}{-2} \Rightarrow y = 4$$

په نتیجه کې $x = 5$ او $y = 4$ یعنې $(5, 4)$ ددې معادلې حل دی.

د تعویض په طریقه د یو دوه مجهوله معادلو د سیستم حل.

په دې طریقه کې یوه مجهول د بل مجهول له جنسه په یوه معادله کې په لاس راوړي او هغه په دوهمه معادله کې وضع کوي تر څو یوه، یوه مجهوله معادله په لاس راشي. د هغې د حل څخه وروسته دغه معلوم شوی مجهول په یوه معادله کې ږدو تر څو دوهم مجهول پیدا شي.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 & \dots (I) \\ 5x - 4y = 22 & \dots (II) \end{cases}$$

حل: دستور سره سم.

$$2x - 3y = 6 \dots (I) \Rightarrow 2x = 3y + 6 \Rightarrow x = \frac{3y + 6}{2}$$

د x دا قیمت په (ii) معادله کې ږدو.

$$5x - 4y = 22 \dots (II) \Rightarrow 5 \cdot \frac{3y + 6}{2} - 4y = 22 \Rightarrow 15y + 30 - 8y = 44$$

$$\Rightarrow 7y = 44 - 30 \Rightarrow 7y = 14 \Rightarrow y = \frac{14}{7} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = \frac{3y+6}{2} = \frac{6+6}{2} = 6$$

د معادلو حل $x = 6$ او $y = 2$ دي.

د دوه مجهوله معادلو د سیستم حل د تیرمینانت په طریقه

که چېرې د $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ د معادلو سیستم په یوه له مخکښینو طریقو حل شي په لاس راځي چې

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

اوس درې د تیرمینانتونه Δ ، Δ_x و Δ_y په لاندې ډول تعریف کیږي.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - c_1a_2$$

د پورتنی معادلو د سیستم حل عبارت له (x, y) څخه دی، په داسې حال کې چې

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \text{ او } y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \text{ دي.}$$

21 مثال . د $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x - 2y = -6 \end{cases}$ معادلو سیستم حل کړئ.

حل: په لومړۍ سر کې مربوطه د تیرمینانتونه محاسبه کیږي.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) - (1)(3) = -4 - 3 = -7$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) - (3)(-6) = -4 + 18 = 14$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 2(-6) - (2)(1) = -12 - 2 = -14$$

$$\Rightarrow y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-14}{-7} = +2, \quad x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{14}{-7} = -2$$

په گرافیکي توګه د دوه مجهوله معادلو د سیستم حل

لکه څرنګه چې دمخه مو اشاره وکړه چې د یو دوه مجهوله معادلو د سیستم حل ددوی د اړونده مستقیمو خطونو د تقاطع نقطه ده چې د نوموړو دوو معادلو په وسیله معلومیږي.

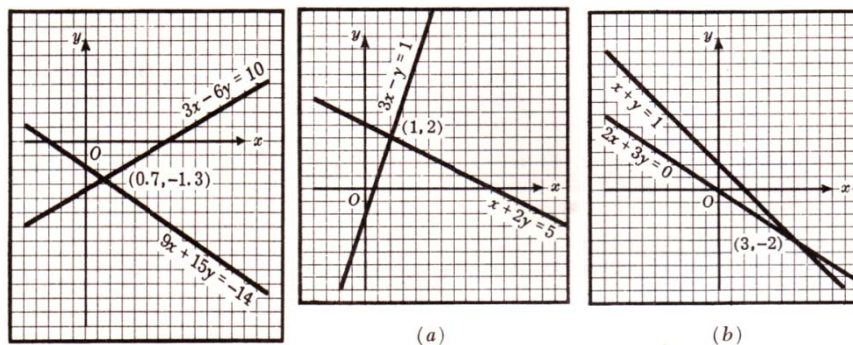
بنا پر دې ددوه مجهوله معادلو د سیستم په گرافیکي حل کې کافي ده چې ددې معادلو اړونده مستقیم خطونه (ددوی گرافونه) رسم شي او د هغوی د تقاطع نقطه د دې سیستم د حل څخه عبارت دی چې د رسم کولو په جریان کې باید دقیق معین شي.

د گرافیکي حل لپاره د مستقیمو خطونو د رسم کولو او ددوی د مشترکې نطقې د دقیق موقیعت لپاره د گراف کاغذ په مناسب دقت سره کارول کیږي.

22 مثال. د لاندې خطي معادلو د سیستمونو حل په گرافیکي توګه معلوم کړئ

$$(i) \begin{cases} x+2y=5 \\ 3x-y=1 \end{cases}, \quad (ii) \begin{cases} x+y=1 \\ 2x+3y=0 \end{cases}, \quad (iii) \begin{cases} 3x-6y=10 \\ 9x+15y=-14 \end{cases}$$

حل: ددې ورکړل شوي سیستمونو گراف په لاندې ډول رسم کیږي.



د پورتنیو شکلونو څخه لیدل کیږي چې مطلوبه حل په ترتیب سره عبارت دی له

$$(i) \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}, \quad (ii) \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}, \quad (iii) \begin{cases} x = 0.7 \\ y = -1.3 \end{cases}$$

لومړۍ درجه دوه نامساويگانې

لومړۍ درجه دوه مجهوله نامساوي گانې په عمومي توګه دا لاندې څلور شکلونه لري.

$$ax + by + c < 0, \quad ax + by + c \leq 0$$

$$ax + by + c > 0, \quad ax + by + c \geq 0$$

ددې ډول نامساوي گانو د حل څخه مطلب په مستوي کې د هغو نقطو (x, y) معلومول دي چې مربوطه نامساوي گانې صدق کوي.

د نامساوي گانو د حل لپاره لومړی د $ax + by + c = 0$ گراف چې یو مستقیم خط دی، رسم کوو او دا مستقیم خط مستوي په دوو برخو ویشي. بیا ددې مستوي د یوې برخې یوه نقطه خوښوو او په نامساوي کې یې وضع کوو. که چېرې نوموړې نقطه هغه نامساوي صدق کړي. نو د هغې ناحیې ټولې نقطې هغه نامساوي صدق کوي او هغه د نامساوي حلونه دي.

که چېرې انتخاب شوي نقطه په هغه نامساوي کې صدق نه شي، نو دهغې ناحیې ټولې نقطې هغه نامساوي نه صدق کوي. په دې ترتیب د مخامخ ناحیې د نقطو ست د دې نامساوي حلونه دي.

هغه ناحیه چې نامساوي نه صدق کوي په شکل کې نشاني شویده.

23 مثال. د $5y + 2x \leq -10$ نامساوي حل کړئ؟

حل: لومړی نامساوي اسانه کوو.

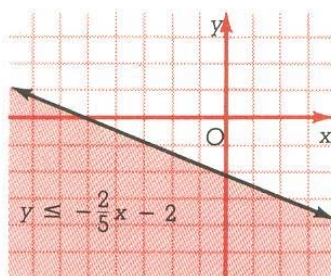
$$5y + 2x \leq -10 \Rightarrow 5y \leq -2x - 10 \Rightarrow y \leq -\frac{2}{5}x - 2$$

د $y = -\frac{2}{5}x - 2$ مستقیم خط رسم کوو چې مستوي په دوو برخو ویشي اوس د

مستوي یوه نقطه $(0,0)$ په $y \leq -\frac{2}{5}x - 2$ کې وضع کوو. څرنګه چې دا نقطه

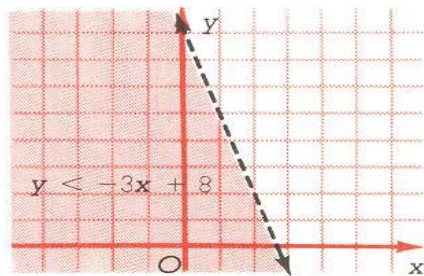
نامساوي صدق کوي، نو ټولې هغه نقطې چې د $(0,0)$ برخې په مستوي کې واقع دي، د خط د نقطو په شمول ددې نامساوي حلونه دي.

(لاندی شکل)



24 مثال. د $8 - y > 3x$ نامساوي حل کړئ.

حل نامساوي ساده کوو او مستقیم خط رسموو. بیا هم یوه نقطه په نامساوي کې وضع او د هغې د حلونو ست په ګوته کوو. دا حل د مستقیم خط نقطې د حلونو په ست کې نه دي شاملې.



$$8 - y > 3x \Rightarrow -y > 3x - 8 \Rightarrow y < -3x + 8$$

د لومړۍ درجې دوه مجهوله نامساوی ګانو سیستم

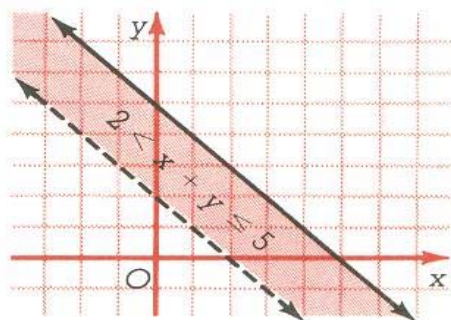
په یو وخت څو نامساوي ګانې د نامساوي ګانو د سیستم څخه عبارت دي. ددې سیستم د حل څخه مطلب د هغو نقطو پیدا کول دي چې نوموړی نامساوي ګانې په یو وخت کې صدق کړي. د لومړۍ درجې دوه مجهوله نامساوي ګانو د سیستم د حل لپاره لومړی د هغوی هره نامساوی بېله بېله حل کوو او د هغوی د حلولو مشترکې نقطې د سیستم د حل څخه عبارت دي. که چېرې ددې سیستم حل په مستوي کې یو محدوده ناحیه وي نو دا حل یوه څو ضلعی جوړه وي. دا حالت هغه وخت پیښېږي چې د سیستم د معادلو شمیر له دوو څخه زیات وي.

25 مثال . د $2 < x + y \leq 5$ نامساوی ګانو سیستم حل کړئ؟

حل: ددی نامساوی ګانو $x + y \leq 5$ او $2 < x + y$ ګرافیکي حل په قایمو مختصاتو کې په نظر کې نیسو. د (x, y) نقطې کومې چې دواړه نامساوی ګانې همزمان صدق کوي د نوموړي نامساوي ګانو د سیستم حل دی.

$$2 < x + y \leq 5 \Rightarrow \begin{cases} 2 < x + y \\ x + y \leq 5 \end{cases}$$

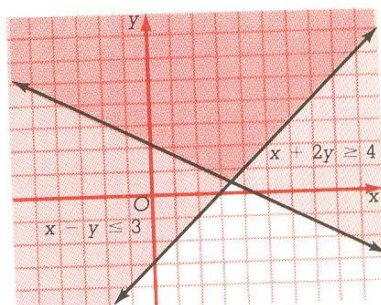
اوس د $x + y = 5$ او $2 = x + y$ مستقیم خطونه رسمو او ددی نامساوی



ګانو د حل مشترکې نقطې معلومو.

26 مثال. د
$$\begin{cases} x + 2y \geq 4 \\ x - y \leq 3 \end{cases}$$
 نامساوي ګانو سیستم حل کړئ

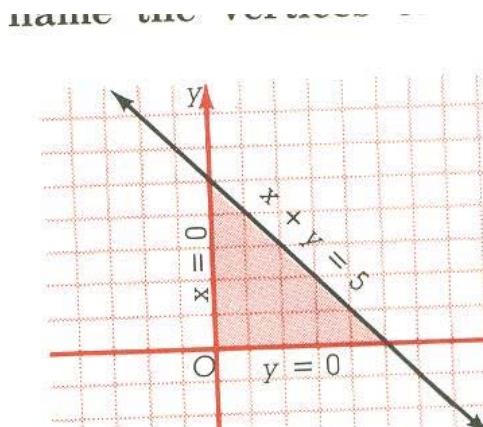
حل: دواړه مستقیم خطونه رسم کوو او مشترکه ناحیه د هرې نامساوي حل معلوموي.



27 مثال. ددې نامساوی ګانو سیستم
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$$
 حل کړئ.

حل: درې مستقیم خطونه $x = 0$ (افقی محور)، $y = 0$ (عمودی محور) او $x + y = 5$ رسم کوو ددې دریو واړو نامساوی ګانو د مشترک حل نقطې چې د

یو مثلث داخلي او محيطي نقطو څخه عبارت دي. د لاندې شکل سره سم په لاس راځي.



د درې مجهوله خطي معادلو سیستم

دا سیستم درې خطي معادلې او درې مجهوله لري چې په اصلي حالت کې لاندې

شکل لري.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

د دریو مجهوله خطي معادلو د سیستم حل د افنا او تعویضي په طریقو

د درې مجهوله خطي معادلو سیستم هم کیدلی شي په تعویضي، افنا او دیترمنیانت په طریقو حل شي. د مثال په توګه د افنا په طریقه د سیستم د حل لپاره لومړی د یوې

معادلې د مناسب مضرب په نظر کې نیولو سره د طرف په طرف جمع یا تفریق عملیې په وجه، یو مجهول حذف او نوموړی سیستم دوه معادلې په دوو مجهولونو باندې بدلیږي، بیا هغه د مخکښې روشونو څخه په یوه طریقه حل کوو. او ددوو په لاس راغلي مجهولونو قیمتونه، د سیستم په یوه درې مجهوله معادلو کېږي او دریم مجهول لاس ته راوړلو سره زموږ حل سرته رسیږي.

په تعویض طریقه کې دوه معادلې په سیستم کې خوښوو او بیا په یوه معادله کې یو مجهول د نورو له جنسه په لاس راوړو او په دې ترتیب یوه دوه مجهوله معادله په لاس راوړو او په دې ترتیب بیا هم یوه دوه مجهوله معادله په لاس راوړو چې په نتیجه کې دوه معادلې به دوو مجهولو کې یو سیستم په لاس راځي. دا سیستم په یوه طریقه سره حل کوو او دواړه مجهوله په لاس راځي بیا ددې مجهول قیمت په یوه له دریو معادلو کې ږدو تر څو دریم مجهول لاس ته راشي.

28 مثال. د معادلو دا لاندې سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 & \dots (I) \\ x + y + z = 6 & \dots (II) \\ x + y - z = 0 & \dots (III) \end{cases}$$

حل: (I) او (III) معادلې طرف په طرف جمع کوو. په لاس راځي چې $3x = 3$ او د (II) او (III) معادلو څخه په لاس راځي چې $2x + 2y = 6$ اوس نو لاندی سیستم حل کوو

$$\begin{cases} 3x = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow x = 1, \quad 2 + 2y = 6 \Rightarrow y = 2$$

اوس $x = 1$ او $y = 2$ په (I) معادله کې ږدو لرو چې

$$2 - 2 + z = 3 \Rightarrow z = 3$$

په نتیجه کې $(1, 2, 3)$ د راکړل شوي سیستم حل دی.

د درې مجهوله خطي معادلو د سیستم حل د دیترمینانت په طریقه

مترکسونه او دیترمینانتونه د خطي الجبر یو مبحث دی. چې دلته موږ په تفصیل سره په هغې کې نه داخلېږو خو یوازې د دریمې مرتبې د دیترمینانت څخه یادونه کوو او هغه کاره وو.

د $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ عددونو درې مرتبه یې دیترمینانت ددوه مرتبه یې دیترمینانت په مرسته داسې تعریف کوو

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

چې ددوه مرتبه یې دیترمینانتونو د انکشاف او محاسبې څخه وروسته د Δ قیمت په دی ډول په لاس راځي.

$$\Delta = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1.$$

د 3×3 ډوله دیترمینانت ساده انکشاف

په دې طریقه کې دیو درې مرتبه یې دیترمینانت د انکشاف لپاره، لومړئ اول او دوهم ستونونه په تکرار سره د اصلي دیترمینانت ښی. خواته لیکو، ددې جدول د قطرونو د تفاضل څخه د دیترمینانت قیمت په لاس راځي.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$


$$\Rightarrow \Delta = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1.$$

29 مثال. دا لاندې دریمه مرتبه دیترمینانت حساب کړئ؟

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 10 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 10 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 4 \cdot 2 \cdot 10 + 1 \cdot 5 \cdot 2 + 10 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 10 - 3 \cdot 5 \cdot 4 - 10 \cdot 3 \cdot 1$$

$$\Rightarrow \Delta = 80 + 10 + 90 - 40 - 60 - 30 = 50$$

د دیترمینانت په طریقه د دریو مجهوله خطي معادلو د سیستم د حل پیژندنه

د دریو مجهوله خطي معادلو د سیستم

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases}$$

د حل یوه طریقه د کرامر طریقه ده. او ددوه مجهوله معادلو په شان دلته څلور

دیترمینانتونه حسابیږي.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

او بالاخره د سیستم حل عبارت دی له

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

په هره طریقه چې پورتنی د معادلو سیستم حل شي نو د معادلو د دریو مجهولونو قیمتونه عبارت دي له

$$x = \frac{d_1 b_2 c_3 + c_1 d_2 b_3 + b_1 c_2 d_3 - c_1 b_2 d_3 - d_1 c_2 b_3 - b_1 d_2 c_3}{a_1 b_2 c_3 + c_1 a_2 b_3 + b_1 c_2 a_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3}$$

$$y = \frac{a_1 d_2 c_3 + c_1 a_2 d_3 + d_1 c_2 a_3 - c_1 d_2 a_3 - a_1 c_2 d_3 - d_1 a_2 c_3}{a_1 b_2 c_3 + c_1 a_2 b_3 + b_1 c_2 a_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3}$$

$$z = \frac{a_1 b_2 d_3 + b_1 d_2 a_3 + d_1 a_2 b_3 - d_1 b_2 a_3 - a_1 d_2 b_3 - b_1 a_2 d_3}{a_1 b_2 c_3 + c_1 a_2 b_3 + b_1 c_2 a_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3}$$

30 مثال. لاندې د معادلو سیستم حل کړئ؟

$$\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 3x + y + z = 4 \\ x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

حل : خلور اړونده دېترمینانتونه په لاندې ډول محاسبه کېږي.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 2 + 3 + 1 + 1 - 12 = -3$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 12 + 4 + 6 - 3 - 16 = -3$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 8 - 3 - 18 + 4 - 6 + 18 = 3$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 6 + 8 + 9 + 3 + 4 - 36 = -6$$

لهذا

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-3}{-3} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{3}{-3} = -1, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-6}{-3} = 2.$$

د دې سیستم حل عبارت دی له $(1, -1, 2)$.

31 مثال. د لاندې معادلو سیستم حل کړئ؟

$$\begin{cases} x + 2z = 7 \\ 3x + y = 5 \\ 2y - 3z = -5 \end{cases}$$

حل : د پورتنی سیستم په یو معادل سیستم باندې په لاندې ډول بدلوو

$$\begin{cases} x + 0y + 2z = 7 \\ 3x + y + 0z = 5 \\ 0x + 2y - 3z = -5 \end{cases}$$

اوس هغه څلور مربوطه دیترمینانټونه په لاندې ډول حسابوو.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 9, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 9$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 18, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 27$$

لهذا

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{9}{9} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{18}{9} = -1, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{27}{9} = 3.$$

د سیستم حل عبارت دی له $(1, 2, 3)$.

په قسمي کسرونو باندې تجزیه

که چېرې $P_1(x), P_2(x), P_3(x), \dots, P_n(x)$ ناطق کسرونه وي داسې چې

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x) + P_3(x) + \dots + P_n(x)$$

په دې صورت $P_1(x), P_2(x), P_3(x)$ او $P_n(x)$ د $P(x)$ د قسمي کسرونو په نامه یادوي.

د کسرونو د مجموعې لاس ته راوړلو لپاره د کسري افادو د جمع عملیې ته مراجعه کېږي. خو د مسئلې برعکس یعنې که یو کسر راکړل شوی وي دهغې د قسمي کسرونو پیدا کول ددې بحث اصلی مسئله جوړه وي.

که چېرې د یو کسر د صورت درجه د هغې د منخرج له درجې څخه زیاته وي نو د صورت د تقسیم څخه پر منخرج باندې دا کسر د یو پولینوم او یو داسې کسر چې د صورت درجه یې له منخرج له درجې څخه کوچنی وي د حاصل جمع په توګه ارائه کېږي. د مثال په ډول

$$\frac{x^5 + 3x^3 - 1}{x^3 + 2} = x^2 + 3 + \frac{-x^2 - 5}{x^3 + 2}$$

هغه کسرونه چې صورت درجه یې د منخرج له درجې څخه کمه وي د مناسبو کسرونو په نامه یادېږي. دلته زموږ د توجه وړ مسئله په قسمي کسرونو باندې د مناسبو کسرونو تجزیه کول دي.

32 مثال. لاندې نمونه په نظر کې نیسو

$$\frac{-x+8}{x^2-7x+12} = \frac{4}{x-4} - \frac{5}{x-3}$$

د ښې خوا دوو کسرونو د جمع کولو څخه چې خوا کسر په لاس راځي. اوس خبره دا ده چې د چې خوا اصلي کسر څخه څرنگه قسمي کسرونه په لاس راوړو.

په قسمي کسرونو باندې د تجزيې طريقې

که چېرې $P(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ناطق کسر وي یعنې $P(x)$ د پولینوم درجه د $Q(x)$ د پولینوم له درجې څخه کمه وي نو

اول. د مخرج $q(x)$ د هر فکتور $(ax+b)^k$ لپاره k قسمي کسرونه

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_k}{(ax+b)^k}, \quad k=1,2,3,\dots$$

سره مطابقت کوي، په داسې حال کې چې $A_1, A_2, \dots, A_k$ ثابت عددونه دي.

دوم. د مخرج د $(ax^2+bx+c)^k$ هر فکتور لپاره k قسمي کسرونه

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$$

سره مطابقت کوي، په داسې حال کې چې $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k, B_1, B_2, B_3, \dots, B_k$ ثابت عددونه دي.

33 مثال. د $\frac{x+1}{x^2-x-6}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

حل. تر ټولو د مخه مخرج په ممکنه فکتورونو تجزیه کوو

$$\frac{x+1}{x^2-x-6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x+2)}{(x+2)(x-3)}$$

د مساوي د ښې او کینې خوا د مقایسې څخه باید صورتونه یو تر بله سره منطبق وي نو لازمه ده چې A او B معلوم کړو.

$$x + 1 \equiv A(x - 3) + B(x + 2)$$

که چېرې په ورسټنۍ رابطه کې $x=3$ او $x=-2$ وضع کړو نو په لاس راځي چې

$$\begin{cases} x=3 \Rightarrow 3+1=A \cdot 0+B \cdot 5 \Rightarrow 4=5B \Rightarrow B=\frac{4}{5} \\ x=-2 \Rightarrow -2+1=A(-5)+B \cdot 0 \Rightarrow -1=-5A \Rightarrow A=\frac{1}{5} \end{cases}$$

لهذا

$$\frac{x+1}{x^2-x-6} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(x+2)} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{(x-3)}$$

دوهمه طريقه. د صورتونو د مقايستې څخه A او B په لاندې ډول معلوموو.

$$\begin{aligned} x+1 &\equiv A(x-3)+B(x+2) \\ \Rightarrow x+1 &\equiv (A+B)x-3A+2B \end{aligned}$$

له دې ځايه لاندې دوه مجهوله معادلې په لاس راځي

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -3A+2B=1 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{5}, B=\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x^2-x-6} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{x-3}$$

34 مثال. د $\frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x}$ کسر په قسمي کسرونو تجزيه کړئ.

$$\frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x} = \frac{x^2-x+1}{x(x+1)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x} \equiv \frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x^3+2x^2+x}$$

$$x^2 - x + 1 \equiv A(x+1)^2 + Bx(x+1) + cx$$

$$\begin{cases} x=0 & \Rightarrow A=-1 \\ x=-1 & \Rightarrow C=-3 \Rightarrow B=0 \\ x=1 & \Rightarrow 1=4A+2B+C \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{1}{x} - \frac{3}{(x+1)^2}$$

په دوهم روش باندې د دواړو خواوو د مقایسې څخه یو د درې مجهوله معادلو سیستم په لاس راوړو چې د حل څخه وروسته A ، B ، او C معلومیږي.

35 مثال. د $\frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)}$ په قسمي کسرونو تجزیه کوو.

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A(x^2 + 2x + 2) + (Bx + C)(x-1)}{(x-1)(x^2 + 2x + 2)}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 \equiv A(x^2 + 2x + 2) + (Bx + C)(x-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow -4 = 5A \Rightarrow A = -\frac{4}{5} \\ x=0 \Rightarrow -3 = 2A - C \Rightarrow C = \frac{7}{5} \\ x=-1 \Rightarrow 0 = A + 2B - 2C \Rightarrow B = \frac{9}{5} \end{cases}$$

په نتیجه کې

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)(x^2 + 2x + 2)} = \frac{-4}{5(x-1)} + \frac{9x+7}{5(x^2 + 2x + 2)}$$

36 مثال. د $\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کوو.

$$\frac{2x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2}$$

د کسرونو د هم منخرج کولو وروسته دواړه خواوې سره مقایسه کوو لرو چې

$$2x^2 + 3 = (Ax + B)(x^2 + 1) + (Cx + D)$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3 = Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + (B + D)$$

په دې ترتیب د معادلو دا لاندې سیستم په لاس راځي

$$\begin{cases} A = 0 & A = 0 \\ B = -2 & B = -2 \\ A + B = 0 & C = 0 \\ B + D = 3 & D = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

لهذا

$$\frac{2x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2}{x^2 + 1} + \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$$

دوهمه درجه یو مجهوله معادله

د یوې دوهمې درجې یو مجهوله معادلې عمومي حالت عبارت دی له

$$ax^2 + bx + c = 0$$

چې په هغې کې a ، b او c حقیقی عددونه او $a \neq 0$ دی.

د دوهمې درجې یو مجهوله معادلې حل د مربع د تکمیل په طریقه
دا معادله د مربع د تکمیل په طریقه په لاندې ډول حل کوو.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx = -c \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

د $\Delta = b^2 - 4ac$ لپاره د معادلې جذرونه عبارت دي له

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

لومړۍ حالت که چېرې د $\Delta > 0$ وي، معادله دوه حقيقي یو تربله مختلف
جذرونه لري. او هغه عبارت دي له

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

دوهم حالت. که چېرې $\Delta = 0$ وي معادله دوه مضاعف جذرونه $x_1 = x_2 = \frac{-b}{a}$
لري.

درېم حالت. که $\Delta < 0$ وي، معادله حقيقي جذرونه نه لري او وايي چې معادله په
دې حالت کې دوه مختلط جذرونه لري.

که چېرې b جفت وي نو د $ax^2 + bx + c = 0$ معادلې حل اسانه کېږي.

په دې حالت کې $b = 2b'$ ږدي نو لرو چې

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm \sqrt{(2b')^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2(-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac})}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

په دې ترتیب

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}, \quad \Delta' = b'^2 - ac$$

په داسې حال کې چې Δ' او Δ د معادلې له نظره مشابه خاصیتونه لري.

37 مثال. د $x^2 - 3x + 2 = 0$ معادله حل کړئ.

حل : په دې معادله کې $a = 1$ ، $b = -3$ او $c = 2$ دي. بنا پر دې

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(2) = 1 > 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-(-3) - 1}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{-(-3) + 1}{2} = 2$$

38 مثال. د $x^2 - 2x + 1 = 0$ معادله حل کړئ.

حل : د $a = 1$ ، $b' = \frac{-2}{2} = -1$ او $c = 1$ لپاره لرو چې

$$\Delta' = b'^2 - ac = (-1)^2 - (1)(1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{b'}{a} = -1$$

بنا پر دې معادله مضاعف جذرونه $x_1 = x_2 = -1$ لري.

39 مثال. د $x^2 - 6x + 25 = 0$ معادله حل کړئ.

حل . دلته $a = 1$ ، $b = -6$ او $c = 25$ دي نو

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(25) = 36 - 100 = -64$$

څرنگه چې $\Delta < 0$ ، نو معادله حقيقي جذرونه نه لري مگر مختلط جذرونه په لاندې ډول په لاس راځي.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{6 \pm 8i}{2} = 3 \pm 4i \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 3 + 4i \\ x_2 &= 3 - 4i \end{aligned}$$

40 مثال. د $(x-1)^2 = 2+x$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 &= 2+x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 2+x \Rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0 \\ \Rightarrow a &= 1, b = -3, c = -1 \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(1)(-1) = 9 + 4 = 13 \\ x_1 &= \frac{-(-3) - \sqrt{13}}{2} = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \\ x_2 &= \frac{-(-3) + \sqrt{13}}{2} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$

يادداشت. په دې بحث کې مو فورمول د تکميل مربع په طريقه په لاس راوړ. دوهمه درجه معادلې کولی شو ددې طريقې تر څنګ په يوه بله موازي طريقه هم حل کړو. او هغلته فورمول نه کاروو.

41 مثال. د $x^2 - 8x + 15 = 0$ معادله حل کړئ.

حل : دا معادله د تکميل مربع د مستقيم روش په وسيله په لاندې ډول حل کېږي.

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 15 &= 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 + 15 = 16 \\ \Rightarrow (x-4)^2 &= 1 \Rightarrow x-4 = \pm 1 \Rightarrow x = 4 \pm 1 \\ \Rightarrow x_1 &= 4-1=3, \quad x_2 = 4+1=5 \end{aligned}$$

42 مثال. لاندې معادلې حل ڪريئ.

$$a. \quad x^2 - 6x + 25 = 0 \quad , \quad b. \quad x^2 - 8x + 25 = 0$$

حل .

$$a. \quad b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(25) = 36 - 100 = -64$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{6 \pm 8\sqrt{-1}}{2} = \frac{6 \pm 8i}{2} = 3 \pm 4i$$

$$x_1 = 3 + 4i \quad , \quad x_2 = 3 - 4i$$

$$b. \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(1)(25) = 64 - 100 = -36$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{8 \pm 6\sqrt{-1}}{2} = \frac{8 \pm 6i}{2} = 4 \pm 3i$$

$$x_1 = 4 + 3i \quad , \quad x_2 = 4 - 3i$$

43 مثال. د $x^2 - 2x - 2\sqrt{3} - 3 = 0$ معادله حل ڪريئ.

حل .

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - (1)(-2\sqrt{3}-3)}}{1} = 1 \pm \sqrt{1+2\sqrt{3}+3}$$

$$\Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = 1 \pm (1+\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow x_1 = 2 + \sqrt{3} \quad , \quad x_2 = -\sqrt{3}$$

44 مثال. د $x^2 - 2\sqrt{3}x - 9 = 0$ معادله حل ڪريئ.

حل. دلته ٻنہ دا ده چي $b' = \frac{b}{2} = -\sqrt{3}$ په نظر ڪي ونيول شي. نو په دي ترتيب

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{(\sqrt{3})^2 - (1)(-9)}}{1} = \sqrt{3} \pm \sqrt{12} = \sqrt{3} \pm 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x_1 = 3\sqrt{3}, \quad x_2 = -\sqrt{3}$$

د دوهمې درجې دوه مجهوله معادلو حل د تجزئې په طريقه

د تجزئې په طريقه د دوهمې درجې يو مجهوله معادلې حل تکميل مربع ته ورته په لاندې ډول بيانوي.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

ليدل کيږي چې مخکښې فورمول په لاس راغی. عددي سوالونه کولی شو په همدې طريقه حل کړو.

45 مثال. د $x^2 - 6x + 8 = 0$ معادله د تجزئې په طريقه حل کړئ.

حل:

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 - 9 + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)^2 - 1^2 = 0 \Rightarrow (x - 3 - 1)(x - 3 + 1) = 0 \Rightarrow (x - 4)(x - 2) = 0$$

$$\begin{aligned} x - 4 &= 0 \Rightarrow x_1 = 4 \\ \Rightarrow x - 2 &= 0 \Rightarrow x_2 = 2 \end{aligned}$$

د دوهمې درجه معادلې د جذرونو مجموعه او د ضرب حاصل

که چېرې x_1 او x_2 د $ax^2 + bx + c = 0$ معادلې جذرونه اوسي، نو لرو چې:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

بنا پر دې $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ او $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ دی. اوس که د اصلي معادلې دواړه خواوې پر a تقسیم کړو لرو چې

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

په نتیجه کې هغه معادله چه جذرونه یې x_1 او x_2 دي عبارت ده له

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

هغه معادلې چې په دوهمه درجه معادلو بدلیږي

اول . جذر لرونکی معادلې. په دې معادلو کې مجهول کمیتونه قسمي یا کلي تر جذر لاندې وي.

ددا ډول معادلو د حل لپاره یوه جذر لرونکي افاده د تساوي یوې خواته ساتو نو د تساوی ددواړو خواو د مربع کولو څخه هغه جذر له منځه ځي. او په نهائي حالت کې معادله په اوله درجه یا دوهمه درجه معادله بدلیږي. د مربع کولو په اړدو کې امکان شته چې ځینې منفي ایشارې تلف شي. نو ځکه باید لاس ته راغلي جذرونه په اصلي معادله کې وضع او امتحان شي. هغه قیمتونه چې معادله صدق کړي هغه د معادلې حل دی.

44 مثال. د $3\sqrt{x} + \sqrt{9x+13} - 13 = 0$ معادله حل کړئ.

حل :

$$\begin{aligned} 3\sqrt{x} + \sqrt{9x+13} - 13 = 0 &\Rightarrow \sqrt{9x+13} = 13 - 3\sqrt{x} \\ \Rightarrow (\sqrt{9x+13})^2 &= (13 - 3\sqrt{x})^2 \Rightarrow 9x + 13 = 169 - 78\sqrt{x} + 9x \\ &\Rightarrow 78\sqrt{x} = 156 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4 \end{aligned}$$

که چېرې احتمالي جذر $x=4$ په اصل معادله کې وضع شي نو هغه نه صدق کوي
په دې ترتیب معادله حل نه لري.

45 مثال . د $\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} = \sqrt{6x+13}$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\begin{aligned}\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} &= \sqrt{6x+13} \Rightarrow (\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2})^2 = (\sqrt{6x+13})^2 \\ x+7 + x+2 + 2\sqrt{x+7}\sqrt{x+2} &= 6x+13 \Rightarrow \sqrt{x+7}\sqrt{x+2} = 2x+2 \\ \Rightarrow (\sqrt{(x+7)(x+2)})^2 &= (2x+2)^2 \Rightarrow (x+7)(x+2) = (2x+2)^2 \\ \Rightarrow x^2 + 9x + 14 &= 4x^2 + 8x + 4 \Rightarrow 3x^2 - x - 10 = 0 \\ \Rightarrow (x-2)(3x+5) &= 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -\frac{5}{3}\end{aligned}$$

د لاس ته راغلو جذرونو څخه نوموړي $x = 2$ معادله صدق کوي مگر $x = -\frac{5}{3}$ دا
معادله نه صدق نه کوي، نو د معادلې جذر $x = 2$ دی.

د عوض کولو وړ معادلې

د دې سره سره چې ددوو درجو څخه د لوړې درجې معادلې زموږ په اوسني بحث
کې ګنجایش نه لري. خو ځینې ډول معادلې کیدلې شي د متحول په عوض کولو سره
په دوهمه درجه معادلو راواوړي. او هغه حل شي. خو مثالونه ئې په لاندې ډول
ورکړو.

46 مثال . د $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: دلته $y = x^2$ په نظر کې نیسو لرو چې

$$y^2 - 13y + 36 = 0 \Rightarrow (y - 4)(y - 9) = 0$$

$$\Rightarrow y_1 = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$$

$$\Rightarrow y_2 = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_3 = -3, x_4 = 3$$

په دې ترتيب سره پورتنی معادله څلور حلونه لري.

47 مثال. د $x^4 - 21x^2 - 100 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: بیا هم $y = x^2$ وضع کوو

$$y^2 - 21y - 100 = 0 \Rightarrow (y + 4)(y - 25) = 0$$

$$\Rightarrow y_1 = -4 \Rightarrow x^2 = -4$$

$$\Rightarrow y_2 = 25 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x_1 = -5, x_2 = 5$$

دا معادله دوه حلونه لري.

48 مثال. د $x^4 - 18x^2 - 81 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: $y = x^2$ عوض کوو په لاس راځي چې

$$y^2 - 18y + 81 = 0 \Rightarrow (y - 9)^2 = 0$$

$$\Rightarrow y = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 3$$

49 مثال. د $x^4 + 2x^2 + 3 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: $y = x^2$ عوض کوو لرو چې

$$y^2 + 3y + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -11 < 0$$

دا معادله د حل وړ نه ده نو ځکه اصلي معادله هم حل نه لري.

50 مثال. $\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} - 2 = 0$ حل کړئ.

حل: $y = \sqrt[4]{x}$ عوض کوو، لرو چې

$$y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow (y + 1)(y - 2) = 0 \Rightarrow y_1 = 2, y_2 = -1$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{x} = 2 \Rightarrow (\sqrt[4]{x})^4 = 2^4 \Rightarrow x = 16$$

څرنگه چې $\sqrt[4]{x}$ مثبت دی نو ځکه په -1 سره نشي مساوي کیدلی، نو $x = 16$ ددې معادلې یوازنی جذر دی.

51 مثال. د $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: دلته $y = x + \frac{1}{x}$ ږدو، نو لرو چې

$$2y^2 - 7y + 5 = 0 \Rightarrow y_1 = 1, y_2 = \frac{5}{2} \Rightarrow \begin{aligned} x + \frac{1}{x} = 1 &\Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = -3 < 0 \\ x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} &\Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2, \frac{1}{2} \end{aligned}$$

بنا پر دې د معادلې جذرونه $x_1 = 2$ او $x_2 = \frac{1}{2}$ دي.

52 مثال. د $(x^2 + 3x + 2)^2 - 8(x^2 + 3x) = 4$ معادله حل کړئ.

حل: اوس $u = x^2 + 3x + 2$ په نظر کې نیسو بنا پر دې.

$$\begin{aligned} (x^2 + 3x + 2)^2 - 8(x^2 + 3x) = 4 &\Rightarrow (u + 2)^2 - 8u = 4 \Rightarrow u^2 - 4u = 0 \Rightarrow u = 4, 0 \\ &\Rightarrow x^2 + 3x = 4 \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = 1 \\ &\Rightarrow x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x_3 = -3, x_4 = 0 \end{aligned}$$

نو د معادلې څلور جذرونه عبارت دي له -4 ، -3 ، 1 او 0 .

دریم. پارامتریکي معادلې.

کله چې د یوې دوهمې درجې معادلې ځېنې ضریبونه د یو نوي متحول (پارامتر) له جنسه مثلاً m راکړل شوی وي په طبیعي توګه د معادلې جذرونه هم د همدې پارامتر تابع وي. ځېنې پارامتریکي معادلې ګټه ورې کیدلی شي.

53 مثال. د $-x^2 + mx + \frac{2m+1}{4} = 0$ معادله حل کړئ.

حل: دلته $a = -1$ ، $b = m$ او $c = \frac{2m+1}{4}$ ، نو

$$\Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4(-1)\frac{2m+1}{4} = m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2$$

$$x = \frac{-m \pm \sqrt{(m+1)^2}}{-2} = \frac{-m \pm (m+1)}{-2} = \frac{-m \pm (m+1)}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-m - (m+1)}{-2} = m + \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-m + (m+1)}{-2} = -\frac{1}{2}$$

54 مثال. د m حدود دا ډول معلوم کړئ چې د

$$(m-2)x^2 - 2mx + (m^2 - 4) = 0 \quad \text{معادله دوه مختلف الايشاره}$$

جذرونه ولري

حل:

$$x_1 x_2 < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m^2 - 4}{m - 2} < 0 \Rightarrow m + 2 < 0 \Rightarrow m < -2.$$

55 مثال. د m پارامتر دا ډول معلوم کړئ چې د $x^2 + 6x + m = 0$ معادلې يو

جذر د بل جذر دوه برابره وي.

حل: که چېرې $x_1 = 2x_2$ وي واضح ده چې

$$x_1 + x_2 = -6 \Rightarrow 2x_2 + x_2 = -6 \Rightarrow 3x_2 = -6 \Rightarrow x_2 = -2$$

$$\Rightarrow x_1 = 2x_2 = -4 \Rightarrow m = x_1 x_2 = (-4)(-2) = 8$$

56 مثال. د m قيمت دا ډول معلوم کړئ چې د $2x^2 - 3x + m = 0$ معادلې

جذرونه يو د بل معکوس وي.

حل: که x_1 او x_2 يو تر بله سره معکوس وي نو څرگنده ده چې $x_1 x_2 = 1$

له بلې خوا

$$2x^2 - 3x + m = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{m}{2} = 0 \Rightarrow \frac{m}{2} = x_1 x_2 \Rightarrow \frac{m}{2} = 1 \Rightarrow m = 2$$

د دوهمې درجې افادو د علامو معلومول

د یوې دوهمې درجې افادې $ax^2 + bx + c$ د علامو د معلومولو څخه مطلب د x د حقيقي قيمتونو د هغو مقدارونو معلومول دي چې د هغوی لپاره نوموړي مقدارونه مثبت، منفي یا صفر وي. په دې مقصد لومړی د $ax^2 + bx + c = 0$ معادله حل کوو، د هغې جذرونه معلوموو او بیا د اشارو د معلومولو په جدول کې د مخکښنۍ افادې علامې ددوو جذرونو د لرلو په حالت کې د یو جذر د لرلو په حالت کې او د جذر د نه لرلو په حالت کې په لاندې ډول معلوموو.

لومړۍ حالت: که چېرې د $ax^2 + bx + c = 0$ معادله دوه جذر x_1 او x_2 ولري ($\Delta > 0$) نو افاده دا لاندې شکل لري

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

ددې په نظر کې نیولو سره چې $a > 0$ او یا $a < 0$ وي د پورتنۍ افادې د علامو معلول د لاندې جدول سره سم سرته رسیږي.

$a > 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	∞
$x - x_1$		-	0	+
$x - x_2$		-	-	0
$(x - x_1)(x - x_2)$		+	0	-
$a(x - x_1)(x - x_2)$		+	0	-

$a < 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	∞
-----	-----------	-------	-------	----------

$x - x_1$	-	0	+	+	+
$x - x_2$	-	-	-	0	+
$(x - x_1)(x - x_2)$	+	0	-	0	+
$a(x - x_1)(x - x_2)$	-	0	+	0	-

د پورتنی جدول څخه لیدل کیږي چې د افادې اشاره د جذرونو تر منځ د a د ایشاری په خلاف او د جذرونو څخه خارج د a د ایشارې سره موافقه ده.

دوهم حالت: که چېرې $ax^2 + bx + c = 0$ یو مضاعف جذر ولري ($\Delta = 0$) ، نو افاده دا لاندې شکل لري.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

ددې په نظر کې نیولو سره چې $a > 0$ او یا $a < 0$ دی د افادې د علامو معلومول د لاندې جدول سره سم تر سره کیږي.

$$a > 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$				∞
$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$		+	+	0	+	+
$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$		+	+	0	+	+

$$a < 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$				∞
$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$		+	+	0	+	+
$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$		-	-	0	-	-

په دې حالت کې لیدل کېږي چې د افادې اشاره د a د اشارې سره موافقه ده (مګر $x = -\frac{b}{a}$ د خخه پرته چې هغلته صفر کېږي).

دریم حالت. که چېرې د $ax^2 + bx + c = 0$ معادله کوم حقیقي جذر، ونه لري ($\Delta < 0$) نو افاده دا لاندې شکل لري.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right)^2\right]$$

ددې په نظر کې نیولو سره چې $a > 0$ او یا $a < 0$ دي پورتنی افاده د لاندې جدول سره سم د a هم اشاره ده.

$$a > 0$$

x	$-\infty$	∞				
ax^2+bx+c		+	+	+	+	+

$$a < 0$$

x	$-\infty$					∞
ax^2+bx+c		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

په دې حالت کې لیدل کېږي چې د افادې اشارې د a د اشاره سره موافقه ده.

57 مثال. د $x^2 - 6x + 5$ افادې اشاره معلومه کړئ چې د x د کومو قیمتونو لپاره مثبت، منفي، یا صفر دی؟

حل: لومړی د $x^2 - 6x + 5$ معادله حل کوو.

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 5$$

x	$-\infty$	1	5	∞			
$x-1$	-	-	0	+	+	+	+
$x-5$	-	-	-	-	0	+	+
$(x-1)(x-5)$	+	+	0	-	0	+	+

نو د $x^2 - 6x + 5$ افادې د $x \in (-\infty, 1) \cup (5, \infty)$ لپاره مثبت د $x \in (1, 5)$ لپاره منفي او د $x \in \{1, 5\}$ لپاره صفر دی.

58 مثال. د $-x^2 + 6x - 8$ افادې اشاره معلومه کړئ.

حل: د $-x^2 + 6x - 8 = 0$ معادلې له حل څخه په لاس راځي چې جذرونه یې $x = 2$ او $x_2 = 2$ دي. بنسټیز دی $-x^2 + 6x + 8 = -(x-2)(x-4)$ ، نو د افادې اشاره د x د هغو قیمتونو لپاره کوم چې د جذرونو څخه خارج وي د $a = -1$ سره هم اشاره یعنی منفي او د جذرونو په داخل کې د هغې مخالفه یعنی مثبت ده اما په جذرونو کې صفر کیږي. په بل عبارت د $x \in (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$ لپاره د $-x^2 + 6x - 8$ افادې اشاره منفي د $x \in (2, 4)$ لپاره دا افاده مثبت اشاره لري او د $x \in \{2, 4\}$ لپاره د افادې قیمت صفر دی. تفصیل په لاندې جدول کې.

x	$-\infty$	2	4	∞			
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$

$(x-2)(x-4)$	+	+	0	-	0	+	+
$-(x-2)(x-4)$	-	-	0	+	0	-	-

59 مثال. د $x^2 - 6x + 9$ افادې اشاره معلومه کړئ.

حل: د $x^2 - 6x + 9 = 0$ معادله مضاعف جذرونه لري يعنې $x = 3$ د $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ د x د اشاره د x د ټولو قيمتونو لپاره مثبت (اما يوازی په $x = 3$ کې صفر دی).

60 مثال. د $x^2 + x + 9$ افادې اشاره معلومه کړئ.

حل: څرنگه چې $\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = -5 < 0$ نو د $x^2 + x + 9 = 0$ معادله حل نه لري او د افادې اشاره د $a = \pm 1$ سره هم اشاره ده يعنې د x په ټولو قيمتونو کې مثبت ده.

دوهمه درجه نامساوي ګانې

په عمومي توګه دوهمه درجه نامساوي ګانې څلور حالتونه لري.

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad ax^2 + bx + c \geq 0$$

$$ax^2 + bx + c < 0, \quad ax^2 + bx + c \leq 0$$

د يوې دوهمه درجې نامساوي د حل څخه مطلب د x د هغو قيمتونو معلومول دي د کومو لپاره چې راکړل شوي چې يو له پورتنیو څلورو حالتونو څخه به وي صدق کړي. څرګنده ده چې ددې نامساوي د حل لپاره بايد د افادې علامې معلومې شي، چې بيا د x لپاره هغه ناحيې معلومېږي په کومو کې چې نامساوي صدق کوي.

61 مثال. د $x^2 - 4x - 5 > 0$ نامساوي حل کړئ.

حل. لومړۍ طريقه د $x^2 - 4x - 5 = 0$ معادلې جذرونه معلومو، د $x^2 - 4x - 5$ افادې اشارې معلومو.

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 5$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 = (x+1)(x-5)$$

بناپردي

x	$-\infty$	-1	5	∞			
$x+1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$(x+1)(x-5)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

واضح ده چې د نامساوي حل عبارت له $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$ څخه دی.

دوهمه طريقه

$$x^2 - 4x - 5 > 0 \Rightarrow (x+1)(x-5) > 0 \Rightarrow \begin{matrix} x+1 > 0 \wedge x-5 > 0 \\ x+1 < 0 \wedge x-5 < 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x > -1 \wedge x > 5 \Rightarrow x > 5 \\ x < -1 \wedge x < 5 \Rightarrow x < -1 \end{matrix} \Rightarrow x < -1 \vee x > 5$$

بناپردي د مطلوبه حل ناحیه $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$ ده.



62 مثال. د $3x^2 + 2x + 2 < x^2 + x + 2 + 4$ نامساوي حل کړئ.

حل:

$$3x^2 + 2x + 2 < x^2 + x + 4 \Rightarrow x^2 + x - 2 < 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1) < 0$$

بناپر دې

x	$-\infty$	-2	1	∞			
$x+2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$(x+2)(x-1)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

له جدول څخه څرگنده ده چې د نامساوي د حلونو ست $(-2, 1)$ ده**63 مثال.** د $(x+5)(x-1)(x-2) < 0$ نامساوي حل کړئ.

حل: د لاندې جدول څخه استفاده کوو.

x	$-\infty$		-5		1		2		∞
$x+5$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$(x+5)(x-1)(x-2)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

له جدول څخه په څرگنده لیدل کیږي چې د نامساوي حل عبارت دی له

$$(-\infty, -5) \cup (1, 2)$$

**64 مثال.** د $\frac{2x-8}{3x+15} > 0$ نامساوي حل کړئ.

حل:

x	$-\infty$	-5	4	∞
$2x-8$	-	-	-	+
$3x+15$	-	-	+	+
$\frac{2x-8}{3x+15}$	+	+	0	+

ليدل کيږي چې ددې نامساوي حل عبارت له $(-\infty, -5) \cup (4, \infty)$ عددي سېټ څخه دی.

د دوهمې درجې پولینومونه گرافیکي اړاڼه

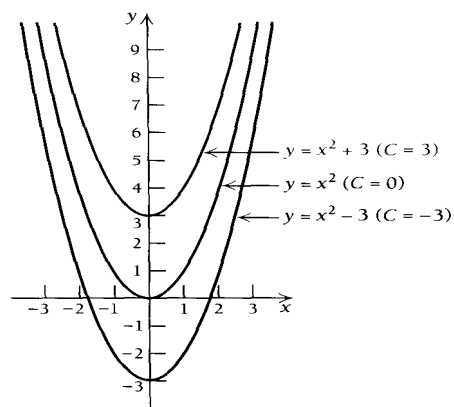
د $f(x) = ax^2 + bx + c$ دوهمه درجه پولینوم په نظر کې نیسو، چه دلته a ، b او c حقیقي عددونه او $a \neq 0$ دی. ددې ډول افادو د رسم کولو لپاره لاندې مقدماتي مثالونه په نظر کې نیسو.

65 مثال. د $y = x^2 + c$ گراف کله که $c = 0$ ، $c = 3$ ، او $c = -3$ وي رسم کړئ.

حل. د $c = 0$ په حالت کې یعنې $y = x^2$ گراف د څومعینو قیمتونو په استفاده د لاندې جدول په نظر کې نیولو سره رسم کوو

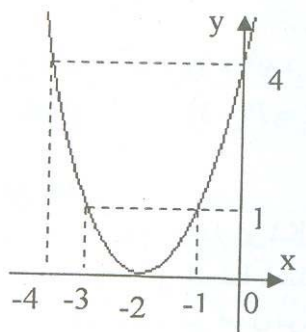
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

ددې گراف انتقال د دریو واحدونو په اندازه پورته او کښته د $y = x^2 + 3$ او $y = x^2 - 3$ حالتونه را په څوټه کوي.



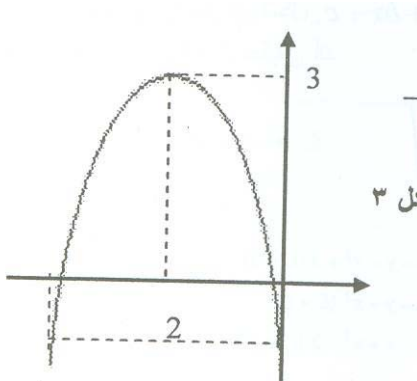
66 مثال. د $f(x) = (x + 2)^2$ گراف رسم کړئ او د مخکښیني گراف سره یې پرتله کړئ.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
y	9	4	1	0	1	4	9



67 مثال. د $g(x) = -(x + 2)^2$ گراف رسم کړئ. بیا هم د مناسبو قیمتونو جدول په لاندې ډول په نظر کې نیسو.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
$g(x)$	-6	-1	2	3	2	-1	-6



په دریو ورستیو مثالونو کې گرافونه په کامل توګه یو بل ته ورته دي. مګر د هغوی موقیعت او د راسونو خوا (سمت) یو تر بله سره فرق لري.

عمومی حالت

اوس په عمومي توګه $f(x) = a(x - h)^2 + k$ افاده د 14 مثال سره پرتله کوو. لیدل کېږي چې د هغې اعظمي یا اصغري عبارت له (h, k) څخه دي، خو د اعظمي یا اصغري ډول د a په اشاره پوري تړلي دي. اوس نو $f(x) = ax^2 + bx + c$ ته بدلون ورکړو او د پورتنۍ یادشوي په ډول یې

بدلوو

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c$$

$$\Rightarrow f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \quad \text{بنا پر دې}$$

په دې ترتیب د $h = \frac{-b}{a}$ او $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$ لپاره د $f(x) = a(x - h)^2 + k$ افاده دا شکل اخلي چې گراف یې $y = x^2$

گراف ته ورته دی او ضریب یې a دی کوم چې د گراف پلنوالی کموي او زیاتوی کله که a منفي وی د گراف خوا (سمت) معکوس کیږي.

(h, k) برسیره پردې گراف د h واحدونو په اندازه په افقي ډول او k واحدونو په اندازه په عمودي ډول انتقال کوي او د پارابولا راس دی.

68 مثال. د پارابولا د راس نقطه په $f(x) = x^2 - 4x + 2$ کې معلومه کړئ.

حل. د پارابولا راس د (h, k) له نقطې څخه عبارت دی. په داسې ډول چې

$$h = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{او} \quad k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{8 - 16}{4} = -2$$

نو بنا پر دې د پارابولا راس $(2, -2)$ دی.

د افقي محور سره تقاطع

د $y = ax^2 + bx + c$ معادلې گراف افقي محور هغه وخت قطع کوي چې $y = 0$ وي. نو دا نقطې د $y = ax^2 + bx + c = 0$ معادلې د حل څخه په لاس راځي، خو دا لاندې درې امکانه مطرح کیږي.

اول. که چېرې معادله دوه جذره x_1 او x_2 ولري نو د پارابولا اړونده گراف، افقي محور په دوو نقطو $(x_1, 0)$ او $(x_2, 0)$ کې قطع کوي.

دوم. که چېرې معادله یوازې یو جذر x_0 ولري نو د پارابولا راس د افقي محور سره د په $(x_0, 0)$ نقطه کې مماس دی.

دریم. که چېرې معادله حل ونه لري، نو پارابولا د افقي محور سره مشترکه نقطه نه لري (د محور څخه پاس یا لاندې موقیعت اخلي)

د عمودي محور سره تقاطع

پارابولا $y = ax^2 + bx + c$ عمودي محور د $(0, c)$ په نقطه کې قطع کوي.

اعظمی او اصغری

د $y = ax^2 + bx + c$ د پارابولا شکل لري، داسې چې د $a > 0$ لپاره د پارابولا راس کښته خواته او د $a < 0$ لپاره د پارابولا راس پورته خواته وي.

خلاصه

د $f(x) = ax^2 + bx + c$ گراف د پارابولا شکل لري، داسې چې

1. د $x_0 = \frac{-b}{2a}$ په نقطه کې اعظمی لري که چېرې $a < 0$ وي.

2. د $x_0 = \frac{-b}{2a}$ په نقطه کې اصغري لري که چېرې $a > 0$ وي.

3. د گراف اعظمي يا اصغري نقطه (x_0, y_0) دی، په داسې حال کې چې

$$y_0 = f(x_0) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \quad \text{او} \quad x_0 = \frac{-b}{2a}$$

دلته $y_0 = f(x_0)$ د تابع اعظمي يا اصغري قیمت بلل کیږي.

4. د افقي محور سره د گراف د تقاطع نقطې د $(x_1, 0)$ او $(x_2, 0)$ څخه عبارت

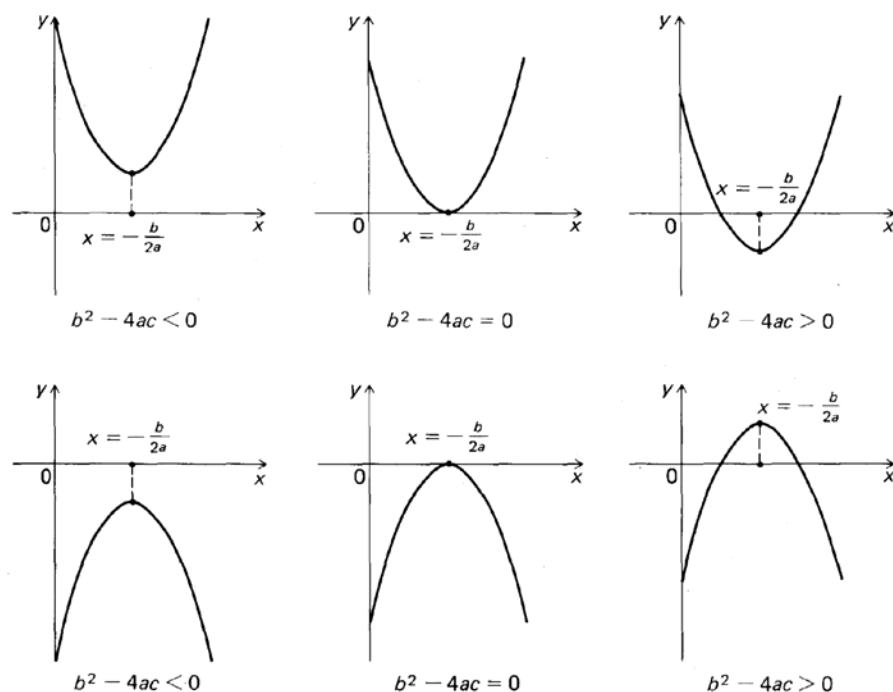
دي، که چېرې x_1 او x_2 د $x^2 + b + c = 0$ معادلې جذرونه وي. که چېرې

دا معادله یو جذر ولري او هغه x_0 وي، نو په هغه صورت کې گراف د $(x_0, 0)$

په نقطه کې د افقي محور سره مماس دی. که معادله جذر ونه لري نو گراف افقي

محور نه قطع کوي.

5. د گراف د تقاطع نقطه د عمودي محور سره د $(0, c)$ څخه عبارت دی.



69 مثال. د $f(x) = x^2 - 6x + 5$ تابع گراف رسم کړئ.

حل. (الف). څرنګه چې $a = 1 > 0$ دی، نو گراف اصغري نقطه لري.

(ب). اصغري نقطه عبارت له (h, k) څخه دی، داسې چې

$$h = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{2} = 3, \quad k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(1) \cdot 5 - (-6)^2}{4(1)} = -4$$

(ج). د x محور سره د منحنی تقاطع: گراف د x محور په هغو نقطو کې قطع

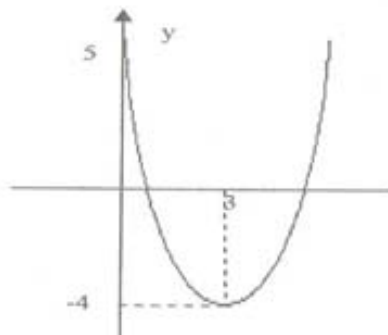
کوي چې $y = 0$ وي. او څرنګه چې

$$y = x^2 - 6x + 5 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 5$$

نو گراف د x محور په دوو نقطو $(1, 0)$ او $(5, 0)$ کې قطع کوي.

(د). د y مسطور سره د منحنی تقاطع: گراف د y محور په $x = 0$ کې قطع

کوي. په دې ترتیب په $(0, 5)$ کې د y محور قطع کوي.



عبارتی سوالونه

په ریاضی کې دوه ډوله مسائل طرحه کېږي. لومړی برخه د ریاضي خالص مسائل دي چې فورمولونه، قضیې او قوانین په برکې نیسي. او دوهم ډول د ورځنۍ ژوند او کارونو مسائل دي. چې د هغوی د تحلیل او منطقي رابطو په اساس کولی شو هغه ریاضي رابطو او قاعدو ته راجع کړو. او دا ډول مسالې عبارتې وي او دوه مرحله لري.

په لومړۍ مرحله کې د عبارتې سوال د تحلیل څخه د ریاضي مسئله په لاس راځي او په اصطلاح کې دی مرحلې ته د ریاضي مودل سازي (فورمول بندي) وائي. په دوهمه مرحله کې د ریاضي په لاس راغلي مسئله حل کېږي. دلته یوازی څو مسالې چې د معادلو مربوط وي، مودل سازی او تحلیل کېږي.

70 مثال. د یو مستطیل اړدښت او پلنوالی (طول او عرض) معلوم کړئ چې محیط یې 50cm او مساحت یې وي.

حل: قبلو چې د مستطیل اړدوالی x سانتي متره وي، نو عرض یې $25 - x$ سانتي متره دي. په دی ترتیب د هغې مساحت عبارت دی له

$$x(50 - x) = 50 \Rightarrow x^2 - 25x + 150 = 0 \Rightarrow (x - 10)(x - 15) = 0 \Rightarrow x_1 = 10, x_2 = 15$$

په دې ترتیب د مسـتطیل اړدوالی $x = 15cm$ او پلنوالی $25 - x = 10cm$ دی.

71 مثال. یو موټر $60 \frac{km}{h}$ فاصله په یو معلوم سرعت سره طی کوي. که چېرې ددې موټر سرعت $40 \frac{km}{h}$ زیات شي نو د سفر موده نیم ساعت کمېږي. د موټر اولنی سرعت معلوم کړئ.

حل: که چېرې د موټر اولنی سرعت x وي، نو ددې په نظر کې نیولو سره چې د فاصلې خارجقسمت پر سرعت باندې د سفر موده راکوي نو

$$\frac{600}{x} - \frac{600}{x+40} = \frac{1}{2} \Rightarrow 600 \cdot 2(x+40) - 600 \cdot 2x = x(x+40)$$

$$\Rightarrow x^2 - 40x + 48000 = 0 \Rightarrow (x-200)(x+220) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 200 \\ x_2 = -240 \end{matrix}$$

په دې ترتیب د موټر سرعت $200 \frac{km}{h}$ دی.

72 مثال. اقبال یو کار 5 ورځی نسبت حمزه ته زر خلاصوي. که چېرې دواړه په یو وخت کې کار وکړی نو هغه کار به په 10 ورځو کې تمام کړي، معلوم کړئ چې هر یو به څانته څانته دا کار په څو، څو ورځو کې تمام کړئ.

حل: که چېرې حمزه هغه کار په n ورځو کې سرته رسوي، نو اقبال هغه کار په $n - 5$ ورځو کې تر سره کوي. په دې ترتیب

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n-5} = \frac{1}{10} \Rightarrow 10(n-5) + 10n = n(n-5) \Rightarrow n^2 - 25n + 50 = 0$$

$$\Rightarrow n = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 200}}{2} \Rightarrow n_1 = 2.2, n_2 = 22.8$$

ليدل کيڙي چي $n = 22.8h$ د حمزه د کار وخت او $n - 5 = 17.8h$ د اقبال د کار موده په لاس راځي.

مگر د $n = 2.2h$ د حمزه د کار موده منطقي نه ده، ځکه بيانو د اقبال د کار موده $n - 5 = -3.5h$ په لاس راځي چي دا ناممکنه ده.

73 مثال. ددوو عددونو د مربع گانو مجموعه 34 دی که چېرې دوهم عدد د دوهم عدد دوه چنده څخه يو واحد کم وي، عددونه معلوم کړئ.

حل: که لومړی عدد n په نظر کې ونيول شي نو دوهم عدد $2n - 1$ دی. بنا پر دې

$$\begin{aligned} n^2 + (2n - 1)^2 &= 34 \Rightarrow 5n^2 - 4n - 33 = 0 \\ \Rightarrow \Delta' &= (-2)^2 - 5(-33) = 169 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 13 \\ \Rightarrow n &= \frac{2 \pm 13}{5} \Rightarrow n_1 = 3, n_2 = -2.2 \end{aligned}$$

که چېرې لومړی عدد $n = 3$ وي نو دوهم عدد $2n - 1 = 5$ دی. په هغه صورت کې چې لومړی عدد $n = -2.2$ انتخاب شي. نو دوهم عدد $2n - 1 = -5.4$ دی.

74 مثال. د يو قايم الزاويه مثلث وتر 34cm دی، که ددې مثلث يوه قايمه ضلعه د بلې قايمې ضلعي په نسبت 14cm اوږده وي. نو د مثلث قايمې ضلعي معلومې کړئ؟

حل: فرض کوو چې لومړی ضلع يې x وي. نو دوهمه ضلع يې $x - 14$ دی بنا پر دې

$$\begin{aligned} x^2 + (x - 14)^2 &= (34)^2 \Rightarrow 2x^2 - 28x - 960 = 0 \Rightarrow x^2 - 14x - 480 = 0 \\ \Rightarrow \Delta' &= 7^2 + 480 = 23 \Rightarrow x = 7 \pm 23 \Rightarrow x_1 = 30, x_2 = -16 \end{aligned}$$

څرنگه چې د مثلث ضلع منفي کیدلی نشي نو لومړی ضلع یې $x = 30\text{cm}$ او دوهمه ضلع یې $x - 14 = 16\text{cm}$ دی.

تمرین

په لاندې رابطو کې مطابقت او معادله سره جلا او په ګوته کړئ.

$$1. \quad 3x - (x + 4) = 2(x - 2) \quad , \quad 2. \quad (x - 1)(x + 1) = (x - 1)^2$$

$$3. \quad (y - 3)^2 + 3(2y - 3) = y(y + 1) - y \quad , \quad 4. \quad x + y = \frac{2x + 2y}{2}$$

لاندې اوله درجه معادلې حل کړئ.

$$5. \quad 2(x + 3) = 3(x - 1) \quad , \quad \frac{x}{3} + \frac{x}{6} = 1 \quad , \quad 6. \quad \frac{2x - 3}{x - 1} = \frac{4x - 5}{x - 1}$$

$$8. \quad \frac{4x + 3}{5} - \frac{2x - 3}{3} = \frac{x - 1}{6} \quad , \quad 9. \quad \frac{x^2}{x - 1} - \frac{x^2}{x + 1} = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

لاندې معادله حل کړئ.

$$10. \quad |2x - 8| = 4 \quad , \quad 11. \quad |8 - 4x| = 20 \quad , \quad 12. \quad |x - 2| = |4 - x|$$

لاندې دوهمه درجه معادلې حل کړئ.

$$13. \quad 3x^2 - 48 = 0 \quad , \quad 14. \quad x^2 + 64 = 20x \quad , \quad 15. \quad x^2 + 2x = 0$$

$$16. \quad x^2 - \frac{17x}{6} = \frac{1}{2} \quad , \quad 17. \quad \sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{2} = 0 \quad , \quad 18. \quad x^2 = 9$$

$$19. \quad \frac{x + 3}{x + 2} - \frac{x + 2}{x + 3} = \frac{x^2 - 75}{x^2 + 5x + 6} \quad , \quad 20. \quad \frac{8x - 3}{x + 3} - 2x = 4 - \frac{3x^2}{x + 3}$$

$$21. \quad x + \sqrt{5x + 10} = 8 \quad , \quad 22. \quad x - 2 = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$$

$$23. \quad \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{19 - 3x^2} \quad , \quad 24. \quad \sqrt{36 + x} - 2 - \sqrt{x} = 0$$

$$25. \quad \sqrt{5x - 1} - \sqrt{x} = 1 \quad , \quad 26. \quad \sqrt{6x + 7} - \sqrt{3x + 3} = 1$$

لاندې د معادلو سیستمونه حل کړئ.

$$27. \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases}, \quad 28. \begin{cases} 12x - 5y = 63 \\ 8x - 15y = 77 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} \frac{5}{3}x - \frac{2}{5}y = 19 \\ 4x + \frac{3}{2}y = 21 \end{cases}, \quad 30. \begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 4 \\ \frac{14}{x} - \frac{3}{y} = 2 \end{cases}$$

$$31. \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + 3y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 1 \end{cases}, \quad 32. \begin{cases} \frac{4x}{3} - \frac{3y}{2} - 2z = 0 \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{4} - \frac{z}{2} = 3 \\ \frac{2x}{3} - 2 = \frac{7y}{4} + z = 0 \end{cases}$$

لاندې نامساوي ګانې حل کړئ.

$$33. \frac{x-5}{4} - \frac{x+8}{3} < \frac{x+11}{6}, \quad 34. \frac{7x-3}{8} + \frac{x+31}{4} < \frac{2x+7}{3}$$

$$35. 5x^2 + 13x - 6 < 0, \quad 36. x^2 - 8x + 12 \geq 0$$

$$37. \frac{4x-2}{-6x+3} > 0, \quad 38. \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2} < 1, \quad 39. \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} < 0$$

لاندې کسرونه په ممکنه قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

$$40. \frac{1}{x^2-4}, \quad 41. \frac{2x^2+3}{x(x-1)^2}, \quad 43. \frac{1}{x(x^2+x+1)}$$

$$44. \frac{x+2}{x^3+x^2-6x}, \quad 45. \frac{3x^2-10x+14}{(x+1)(x-2)^2}, \quad 46. \frac{x^4-x^3+2x^2-x+2}{(x-1)(x^2+2)^2}$$

لاندې د دوه مجهوله نامساوی گانو سیستمونه حل کړئ.

$$47. \begin{cases} x < 0 \\ y > 1 \end{cases}, \quad 48. \begin{cases} x + y \leq 5 \\ x - y \geq 0 \end{cases}, \quad 49. \begin{cases} x - 2y < 8 \\ y - 2x < 8 \end{cases}$$

لاندې نامساوي گانې حل کړئ.

$$50. x^2 - 7x + 7 < 0, \quad 51. -x^2 + 6x - 6 > 0$$

$$52. |3x - 18| \leq 27, \quad 53. x^2 - 6x + 9 \geq 0$$

لاندې گرافونه ترسیم کړئ.

$$54. y = x - 5, \quad 55. y = 4x, \quad 56. y = (x + 2)^2 - 4$$

$$57. y = 2x^2, \quad 58. y = x^2 - x - 1, \quad 59. y = x^2 + 3$$

60. د دوو عددونو 28 او تفاضل یې 12 دی، عددونه پیدا کړئ.

61. د دوو عددونو مجموعه 21 ده، که چېرې اولنۍ عدد د دوهم عدد دوه برابره وي عددونه په گوته کړئ.

62. د دوو عددونو مجموعه 37 دی که چېرې لوی عدد پر کوچنی عدد باندې تقسیم شي، نو خارج قسمت 3 او باقیمانده 5 په لاس راځي، عددونه معلوم کړئ.

63. که چېرې د یوې مربع هر ضلع 4 متر اوږده کړو نو مساحت یې 64 متر مربع زیاتېږي نو د دې مربع هر ضلع څو متر دی.

64. د یو قائم الزاویه مثلث یوه ضلع 20 سانتي متره دی، که چېرې د مثلث وتر د دوهمې ضلعې څخه 10 سانتي متره اوږده وي نو مجهولې ضلعې یې معلومې کړئ.

65. که چېرې د یو کسر د صورت سره 2 عدد زیات کړو اوله منخرج څخه یې 1 کم شي نو هغه کسر $\frac{1}{2}$ کیږي، اوله چېرې د همدې کسر د صورت سره 1 اضافه

شي او له منخرج څخه یې 2 کم شي $\frac{3}{5}$ په لاس راځي. نو دا کسر معلوم کړئ.

66. دوه کاله دمنځه منصور د خپل ځوی شپږ برابره عمر درلودی. 18 کاله وروسته د منصور عمر د هغه د ځوی دوه برابره کیږي. د هغوی عمرونه به څومره وی.

67. پنځه کیلاسونو او پنځو پشقابونه 115 افغانی وي، نو د کیلاسونو او پشقابونو بیه معلومه کړئ.

68. د یوه مثبت عدد درې چنده ددوهم عدد څخه د 5 په اندازه زیات دی، که چېرې ددوی د ضرب حاصل 68 وي، عددونه معلوم کړئ.

69. که چېرې د یو عدد درې برابره مجموعه د هغې د معکوس ددو چنده سره، 5 وي. نوموړی عددونه پیدا کړئ.

شپږم څپرکی

د اعدادو ترادفونه

د اعدادو ترادفونه د ریاضی یوه مهمه موضوع ده. چې د ریاضي د ډیرو مسئلو په تحلیل او له هغې جملې څخه په عددي محاسبو کې زیاته کارونه لري. دلته د ترادفونو مقدماتي او ساده مفهومونه معرفي کېږي.

د ترادف مفهوم.

انتخاب شوي عددونه $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ د عددونو د ترادف (یا ردیف) په نامه یادېږي. دا هر یو عدد د نوموړي ترادف عنصر بلل کېږي. a_1 لومړی عنصر او a_n ، n ام عنصر بولي. د یو ترادف عناصر یو تر بله سره منطقي اړیکې لري.

لکه

د ترادف نوم	ترادف
د جفتو عددونو ترادف	$2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots$
د تاقو عددونو ترادف	$1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1, \dots$
د ۵ عدد د مضربونو ترادف	$5, 10, 15, 20, \dots, 5n, \dots$
د $\frac{1}{3}$ عدد د مضربونو ترادف	$\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{3n}, \dots$

معمولاً یو ترادف د n ام حد، n یو اختیاري عدد په وسیله تعریف او تعین کېږي.

د مثال په توګه

ترادف	د ترادف نوم
$a_n = 2n$, $(n = 1, 2, 3, \dots)$	د جفتو عددونو ترادف
$b_n = 2n - 1$, $(n = 1, 2, 3, \dots)$	د تاقو عددونو ترادف
$c_n = 5n$, $(n = 1, 2, 3, \dots)$	د 5 عدد د مضربونو ترادف
$d_n = \frac{1}{3n}$, $(n = 1, 2, 3, \dots)$	د $\frac{1}{3}$ عدد د مضربونو ترادف

د ترادفونو زیاتوالی او کموالی یا (د ترادفونو تناقص او تزاید)

هغه ترادفونه چې د هغه د عناصر عددي قیمتونه په تدریج سره زیاتوالی مومي متزاید ترادف بلل کیږي. لکه د جفتو عددونو ترادف، د تاقو عددونو ترادف او د 5 د مضربونو ترادف او داسې نور.

1 مثال. د $a_n = n^2$ او $b_n = \frac{2}{n}$ ترادفونه متزاید یا متناقص دی؟

n : 1 2 3 4 5 6

لیدل کیږي چې د a_n ردیف عناصر تزاید کوي نو ځکه متزاید دي او د b_n عناصر کمیږي نو ځکه متناقص دي.

حسابی ترادف (حسابی تصاعد)

هغه ردیف چې د هرو دوو پرله پسې عناصرو (جوړو) تر منځ په مرتبه توګه یو ثابت عدد وي د حسابی ترادف په نامه یادېږي. یعنې

$$a_{n+1} - a_n = d \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + d \quad , \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

دلته d ته د ترادف مشترک تفاضل وایي او a_1 د ترادف لومړی عنصر دی.

2 مثال.

$$5 \quad 2 \quad 17 \quad 14 \quad 11 \quad 8$$

$$a_2 \quad , \quad a_1 \quad , \quad \dots \quad a_6 \quad , \quad a_5 \quad , \quad a_4 \quad , \quad a_3$$

ددې ردیف مشترک تفاضل $d=3$ دی. داسې چې

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = a_1 + d = 2 + 3 = 5$$

$$a_3 = a_2 + d = 5 + 3 = 8$$

$$a_4 = a_3 + d = 8 + 3 = 11$$

که چېرې په یو حسابي ترادف کې لومړی عنصر او مشترک تفاضل په څو ټکه شي نو ترادف معلومیدلی شي.

د یو حسابي ترادف د اختیاري عنصر معلومول

که چېرې a_1 د یو حسابي ردیف لومړی عنصر d مشترک تفاضل او a_n د n ام عنصر وي نو ددوی تر منځ رابطه په لاندې ډول تر کتنې لاندې نیول کیږي.

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d$$

بالاخره نتیجه کیږي چې

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

3 مثال. که چېرې د یو حسابي ترادف لومړی عنصر $a_1 = 5$ ، مشترک تفاضل یې

$d = 2$ وي نو شلم عنصر به یې څو وي.

حل

$$a_{20} = a_1 + 19d = 5 + 19 \cdot 2 = 43$$

4 مثال. یو حسابی ترادف معلوم کړئ چې په هغې کې $a_6 = 27$ او $a_{12} = 57$ وي.

حل: دلته a_1 او d باید معلوم کړو

$$\begin{cases} a_1 + 5d = 27 \\ a_1 + 11d = 57 \end{cases}$$

د دو مجهوله معادلو د سیستم د حل څخه په لاس راځي چې

$$a_1 = 2, \quad d = 5$$

د یو حسابی ترادف د عناصرو مجموعه

د یو حسابی ردیف د n لومړیو عناصرو مجموعه عبارت دی له

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

ثبوت. که چېرې ددې ردیف د لومړیو n عناصرو مجموعه S_n فرض شي یعنې

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

د مثال په توګه د $n=5$ لپاره لرو چې

$$\begin{aligned} \begin{cases} S_5 = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) \\ S_5 = (a_1 + 4d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \end{cases} \\ \Rightarrow 2S_5 = (2a_1 + 4d) + (2a_1 + 4d) + (2a_1 + 4d) + (2a_1 + 4d) + (2a_1 + 4d) \\ \Rightarrow 2S_5 = 2(2a_1 + 4d) \Rightarrow S_5 = \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) \end{aligned}$$

په همدې ډول

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

نتیجه: که چېرې a_1 لومړی عنصر او a_n دیو حسابی ترادف n -ام عنصر وي نو

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

ثبوت: پوهیږو چې

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_1 + (n-1)d]$$

څرنگه چې $a_n = a_1 + (n-1)d$ لهذا

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

5 مثال. د 1 څخه تر 100 پورې د پرله پسې طبیعي عددونو مجموعه حساب کړئ.

حل: طبیعي عددونه حسابي ترادف جوړوي، دا ډول چې $a_1 = 1 = d$ دی. نو د

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

په رابطه کې $n = 100$ او $a_n = 100$ کې وضع کوو نو لرو چې

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{100}{2}(1 + 100) = 50.101 = 5050$$

د طبیعي عددونو مجموعه

طبیعی عددونه یو حسابي ترادف دی چې په هغې کې $a_1 = 1$ او $d = 1$ دی. نو د n

لومړیو مسلسلو طبیعي عددونو مجموعه عبارت دی له

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[2.1 + (n-1).1] = \frac{n(n+1)}{2}$$

بنا پر دې د لومړيو n پرله پسې طبيعي عددونو مجموعه چې له 1 څخه شروع کيږي عبارت دی له

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

بنا پر دې $a = 2 = d$

6 مثال. د جفتو پرله پسې طبيعي عددونو مجموعه: په دې حسابي ترادف کې عددونه جفت دي

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2} [2 \cdot 2 + (n-1) \cdot 2] = n(n+1)$$

$$\Rightarrow 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$$

7 مثال. پرله پسې طبيعي طاق عددونه. هم يو حسابي ترادف دی چې په هغې کې $a_1 = 1$ او $d = 2$ وي نو

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2} [2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 2] = n^2 =$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

هندسي ترادف (هندسي تصاعد)

هغه ردیف چې د هر عنصر او د هغې پرمېني عنصر تر منځ نسبت يو ثابت عدد r وي، د هندسي ترادف په نامه يادېږي يعنې

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n r, (n = 1, 2, 3, \dots)$$

دلته r د ترادف مشترک نسبت، a_1 د هغې لومړنی عنصر دی. يو هندسي ترادف هغه وخت معلومېدلی شي چې لومړی عنصر او مشترک نسبت يې معلوم وي.

8 مثال. په يو هندسي ترادف کې $a_1 = 2$ او $r = 3$ دی. د هغې a_2 ، a_3 او a_4 عناصر پيدا کړئ.

حل.

$$a_2 = a_1 r = 2.3 = 6$$

$$a_3 = a_2 r = 6.3 = 18$$

$$a_4 = a_3 r = 18.3 = 54$$

د یو هندسي ردیف عمومی عنصر

که چېرې د یو هندسي ردیف لومړی عنصر a_1 او مشترک نسبت یې r وي نو د هغې n ام عنصر عبارت دی له

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

ثبوت.

$$a_2 = a_1 r$$

$$a_3 = a_2 r = (a_1 r) r = a_1 r^2$$

$$a_4 = a_3 r = (a_1 r^2) r = a_1 r^3$$

$$a_5 = a_4 r = (a_1 r^3) r = a_1 r^4$$

...

$$\Rightarrow a_n = a_1 r^{n-1}$$

د یو هندسي ترادف د عناصرو مجموعه

د یو هندسي ترادف د n پرله پسې عناصرو مجموعه عبارت دی له

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

ثبوت. وضع کوو یې

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \dots + a_1 r^{n-1} \quad (1)$$

د پورتنی رابطې دواړه خواوې په r ضربوو لرو چې

$$r S_n = r a_1 + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + \dots + a_1 r^n \quad (2)$$

اوله (1) رابطه د (2) رابطې څخه طرف په طرف تفریق کوو

$$r S_n - S_n = a_1 r^n - a_1 \Rightarrow S_n (r - 1) = a_1 (r^n - 1)$$

$$S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1} = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

هندسي سلسله

که چېرې په یو هندسي ترادف کې مشترک نسبت r له $(-1, 1)$ انتروال څخه وي یعنې $-1 < r < 1$ نو د n د لویو قیمتونو لپاره د r^n عدد ډیر کوچنی کیږي. په بل عبارت کله چې n بې نهایت خواته نږدې کیږي نو د r^n عدد صفر خواته تقرب کوي.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

او $r^n = 0$ په نظر کې نیولو سره په لاس راځي چې

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots = \frac{a_1}{1 - r}$$

ددې وروستی رابطې چپ خوا د هندسي سلسلې په نامه او ښی خوا یې د هغې قیمت

(مجموعه) بولی. دا هندسي سلسله په لاندې ډول هم لیکلی شو.

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \dots = \frac{a_1}{1-r}$$

$$\Rightarrow 1 + r + r^2 + r^3 + \dots = \frac{1}{1-r}$$

9 مثال. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ حساب ڪري.

حل: ٻه ڊي سلسله ڪي $a_1 = 1$ او $r = \frac{1}{2}$ دي. نو دستور سره سم

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

10 مثال. ڪه چيري ٻه يو هندسي تصاعد ڪي $a_1 = 2$ او $r = 2$ وي. نو د لومريو

5 عنصرو مجموعو يعني $S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ حساب ڪري.

حل: دستور سره سم

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_1 \frac{1 - r^5}{1 - r}$$

بنا پر ڊي

$$2 + 6 + 18 + 54 + 162 = 2 \cdot \frac{1 - 3^5}{1 - 3} = 2 \cdot \frac{1 - 3^5}{-2} = \frac{1 - 3^5}{-1} = 3^5 - 1 = 242$$

11 مثال. ڪه چيري ٻه يو هندسي تصاعد ڪي $a_1 = 27$ ، مشترڪ نسبت ٻي $r = \frac{1}{3}$

وي نو دهغي د ٽولو عناصرو مجموعو يعني $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$

حساب ڪري.

حل. بيا هم فورمول ٻه نظر ڪي نيسو.

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots = \frac{a_1}{1 - r}$$

$$S = 27 + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots = \frac{27}{1 - \frac{1}{3}} = 40.5$$

12 مثال. د $0,6\overline{23}$ متوالي کسر د هندسي سلسلې په استفاده په عام کسر بدل کړئ.

$$0,6\overline{23} = 0,6\ 23\ 23\ 23 \dots = 0.6 + 0.023 + 0,00023 + 0,0000023 + \dots$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} + \frac{23}{100000} + \frac{23}{10000000} + \dots$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} \left[1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \dots \right]$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} \left[1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100} \right)^2 + \dots \right]$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} \cdot \frac{1}{\frac{99}{100}} = \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} \cdot \frac{100}{99}$$

$$\Rightarrow 0,6\overline{23} = \frac{6}{10} + \frac{23}{990} = \frac{594 + 23}{990} = \frac{617}{990}.$$

تمرین

1- د $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ ردیف په نظر کې ونیسئ د هغې a_1 ، a_5 او a_9 عناصر ولیکئ.

2- د $1, 4, 9, 16, 25, \dots$ ردیف د a_n په شکل ولیکئ.

3- د $a_n = \frac{2n+1}{n}$ ردیف متزاید دی یا متناقص؟ ولې؟

- 4- ایا د $a_n = 2n^n$ ردیف متزاید دی؟ ولې؟
- 5- له لاندې ردیفونو څخه یې کوم یو حسابی دی
- I. $3, 6, 9, \dots$ II. $25, 19, 13, \dots$ III. $5, 10, 14, \dots$
- 6- د k عدد دا ډول وټاکې چې لاندې ردیف حسابي وي.
- $$k-1, k+1, 3k-1, \dots$$
- 7- اتلسم عنصر او د اتلسو عنصرو مجموعه په لاندې ردیف کې پیدا کړئ.
- $$2, 6, 10, \dots$$
- 8- نه څلویښتم عنصر او د 49 عناصرو مجموعه په لاندې ردیف کې پیدا کړئ.
- $$10, 4, -2, \dots$$
- 9- د یو حسابي تصاعد اوم عنصر 41 او دیارلسم عنصر یې 77 دي. نو ددې تصاعد شلم عنصر معلوم کړئ.
- 10- که په یو حسابي تصاعد کې $a_1=7$ او $a_9=77$ وي، نوموړی ترادف معلوم کړئ.
- 11- په دې لاندې ترادفونو کې کوم یو حسابی دی.
- I. $4, 8, 16, \dots$ II. $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots$ III. $12, -4, \frac{4}{3}, \dots$
- 12- د k عدد دا ډول معلوم کړئ چې لاندې ترادف هندسی وي.
- $$2k-1, 3k+1, 6k+2, \dots$$
- 13- اوم عنصر او د لومړنیو اوو عنصرو مجموعه په لاندې هندسی ردیف کې پیدا کړئ.
- $$12, 16, \frac{64}{3}, \dots$$
- 14- نهم عنصر او د لومړنیو نه عنصرو مجموعه په لاندې ترادف کې پیدا کړئ.

$$4, -6, 9, \dots$$

15- پنجم عنصر او د پنځو عنصرو مجموعه په لاندې ترادفونو کې معلوم کړئ.

$$I. a_n = 3n - 4, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$II. a_n = 2 \left(\frac{1}{3} \right)^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

16- د یو هندسي ترادف څلورم عنصر $a_4 = 1$ او اتم عنصر $a_8 = \frac{1}{256}$ دی د هغې لسم عنصر پیدا کړئ.

17- په یو هندسي ترادف کې لومړی عنصر $a_1 = 8$ ، مشترک نسبت 3، $r = \frac{3}{2}$ او لومړیو n عنصرو مجموعه $S_n = \frac{2059}{8}$ وي نو د n او a_n عددونه معلوم کړئ.

18- په لاندې ترادفونو کې حسابي او هندسي ترادفونه سره مشخص کړئ.

$$I. a_n = b n + c, \quad II. b_n = 2^n, \quad III. c_n = \alpha e^{\beta n}$$

$$IV. d_n = (1 + p)^n, p \neq 0, \quad V. e_n = e^n$$

19- د $\left(\frac{1}{3} \right)$ او $\left(-\frac{32}{27} \right)$ جوړو عددونو هندسي وسط معلوم کړئ.

20- وینئ چې د $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \dots$ ترادف یو هندسي ترادف دی او د هغې شلم عنصر ولیکئ.

21- د 4 او 9 عددونو حسابي او هندسي وسطونه پیدا کړئ.

22- د $1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \dots$ هندسي سلسلې مجموعه ولیکئ.

23- د $a_n = \left(\frac{1}{2} \right)^n$ هندسي ترادف د ټولو عناصرو مجموعه په لاس راوړئ.

24- د لاندې سلسلو هرې یوې مجموعه پیدا کړئ.

$$I. 24 + 12 + 6 + \dots$$

$$II. 25 - 20 + 16 + \dots$$

$$III. \quad 0,6 + 0,06 + 0,006 + \dots$$

25- د $x = 0,0 \quad 123 \quad 123 \quad 123 \quad \dots$ متوالی کسر د یوې هندسی سلسلې

په توګه په نظر کې ونیسی او په عام کسر یې بدل کړئ.

اوم خپرکی

لوگارتیم

د عددونو د توانونو او لوگارتیم قاعدې سره ورته دي. او د هغوی د خاصیتونو څخه په محاسبه، د نفوسو د زیاتوالي په وړاندلیدنه، د میکروبیونو په زیاتوالي، د اوبو د ذخیرو په تبخیر کیدلو د جمسونو په وروستوالي، د رادیو اکتیف د مواد تشعشع او نورو کې ورڅخه ګټه اخیستل کېږي.

همدارنګه د لوگارتیم څخه په پیچیده محاسبو او حتی د ریاضیاتو د قضیو په ثبوت کولو او د ریاضی او فزیک د ډول، ډول مسایلو په حل کې ورڅخه ګټه اخیستل کېږي.

په دې برخه کې د عددونو د توانونو او لوگارتیم د خاصیتونو څخه په لنډ ډول مرور کوو.

د حقیقي عددونو توانونه

په لومړۍ فصل کې د حقیقي عددونو لپاره طبیعي او ناطق توانونه معرفي شول. دلته د توان مفهوم د ټولو حقیقي عددونو ساحې ته توسعه ورکول کېږي.

که چېرې a او b مثبت عددونه او x او y حقیقي عددونه وي نو

$$1. \quad a^x a^y = a^{x+y}, \quad 2. \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$3. \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \quad 4. \quad (a \cdot b)^x = a^x b^x$$

$$5. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, b \neq 0, \quad 6. \quad a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

$$7. \quad a^x = b^x \Leftrightarrow a = b$$

دلته پورتنی رابطې لږ ترلږه د x او y د نسبتي قیمتونو لپاره ثبوت کیدلی شي.
د مثال په توګه که $x = \frac{p}{q}$ او $y = \frac{r}{s}$ په نظر کې ونیول شي. په دې صورت کې

$$\begin{aligned} a^x a^y &= a^{\frac{p}{q}} a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ps}{qs}} a^{\frac{qr}{qs}} = \sqrt[qs]{a^{ps}} \sqrt[qs]{a^{qr}} = \sqrt[qs]{a^{ps} a^{qr}} \\ &= \sqrt[qs]{a^{ps+qr}} = a^{\frac{ps+qr}{qs}} = a^{\frac{ps}{qs} + \frac{qr}{qs}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}} = a^{x+y}. \end{aligned}$$

مثالونه

$$1. \quad \left(5^{\frac{1}{3}}\right) \left(5^{\frac{1}{4}}\right) = 5^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = 5^{\frac{7}{12}}$$

$$2. \quad \left(\sqrt[3]{7}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(7^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = 7^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}} = 7^{\frac{1}{15}}$$

$$3. \quad \sqrt[3]{\sqrt{x}} = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$$

$$4. \quad \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = x^{\frac{3-2}{6}} = x^{\frac{1}{6}}.$$

5 مثال. د $2^{2x+3} - 33(2^x) + 4 = 0$ معادله حل کړی.

$$2^{2x+3} - 33(2^x) + 4 = 0 \Rightarrow 2^3 (2^x)^2 - 33(2^x) + 4 = 0$$

دلته وضع کوو $y = 2^x$. لرو چې

$$8y^2 - 33y + 4 = 0 \Rightarrow y_1 = 4, y_2 = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^x = 2^2 \Rightarrow x_1 = 2 \\ 2^x = \frac{1}{8} \Rightarrow x_2 = -3 \end{cases}$$

د توانونو عمومي قواعد لکه څرنگه چې د طبيعي او ناطقو عددونو لپاره صدق کوي، حقيقي عددونو د توانونو لپاره هم صدق کوي.

مثالونه

$$\begin{aligned} 6. \quad 4^\pi \cdot 4^2 &= 4^{\pi+2} \quad , \quad 7. \quad (6^{\sqrt{3}})^2 = 6^{2\sqrt{3}} \\ 8. \quad (4x^2 y)^\pi &= 4^\pi x^{2\pi} y^\pi \quad , \quad 9. \quad \frac{5^2}{5^{\sqrt{3}}} = 5^{2-\sqrt{3}} \end{aligned}$$

د لوگارتيم تعريف

که چېرې $x = b^y$ او $b > 0$ ، $b \neq 1$ وي، په دې صورت کې د y عدد ته د b په قاعده د x لوگارتيم وائي او لیکو چې $y = \log_b x$.
دوه پورتنی عبارتونه یو تر بله سره معادل دي.
$$x = b^y \Leftrightarrow y = \log_b x \Rightarrow x = b^{\log_b x}$$

مثالونه:

$$\begin{aligned} 10. \quad 8 = 2^3 &\Leftrightarrow \log_2 8 = 3 \quad , \quad 11. \quad 8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3 \\ 12. \quad 1000 &= 10^3 \Leftrightarrow \log_{10} 1000 = 3 \\ 13. \quad 0,0001 &= 10^{-4} \Leftrightarrow \log_{10} 0,0001 = -4 \end{aligned}$$

د لوگارتيم خاصیتونه

د a او b مثبتو عددونو او x ، y ، α حقيقي عددونو لپاره لرو چې

$$1. \quad \log_a 1 = 0 \quad , \quad 2. \quad \log_a a = 1 \quad ,$$

3. $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$
4. $\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$
5. $\log_a (x^\alpha) = \alpha \log_a x$
6. $\log_a x . \log_b a = \log_b x$
7. $\log_{a^\alpha} x = \frac{1}{\alpha} \log_a x, \quad \alpha \in R$
8. $(\log_b a)(\log_a b) = 1$

ثبوت

1. $1 = a^0 \Rightarrow \log_a 1 = 0$
2. $a = a^1 \Rightarrow \log_a a = 1$
3. $\begin{cases} \log_a x = u \Rightarrow x = a^u \\ \log_a y = v \Rightarrow y = a^v \end{cases} \Rightarrow xy = a^u a^v \Rightarrow xy = a^{u+v}$
 $\Rightarrow \log_a (xy) = u + v = \log_a x + \log_a y$
 $\Rightarrow \log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$
4. $\begin{cases} \log_a x = u \Rightarrow x = a^u \\ \log_a y = v \Rightarrow y = a^v \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a^u}{a^v} \Rightarrow \frac{x}{y} = a^{u-v}$
 $\Rightarrow \log_a \frac{x}{y} = u - v = \log_a x - \log_a y$
5. $\log_a x = u \Rightarrow x = a^u \Rightarrow x^\alpha = (a^u)^\alpha \Rightarrow x^\alpha = a^{\alpha u}$
 $\Rightarrow \log_a x^\alpha = \alpha . u = \alpha \log_a x$

$$6. \begin{cases} \log_a x = u \Rightarrow x = a^u \\ \log_b a = v \Rightarrow a = b^v \end{cases} \Rightarrow x = (b^v)^u \Rightarrow x = b^{uv}$$

$$\Rightarrow \log_b x = uv = \log_a x \log_b a$$

$$7. \log_a x = u \Rightarrow x = a^u \Rightarrow x^\alpha = a^{\alpha u} \Rightarrow x^\alpha = (a^\alpha)^u$$

$$\Rightarrow \log_{a^\alpha} x^\alpha = u \Rightarrow \alpha \log_{a^\alpha} x = \log_a x$$

$$\Rightarrow \log_{a^\alpha} x = \frac{1}{\alpha} \log_a x$$

د (6) خاصیت په استفاده لیکلی شو چې

$$8. \log_b a \cdot \log_a b = \log_b b = 1$$

نتیجه

له (7) رابطې څخه واضح لیدل کیږي چې:

$$\log_{a^\alpha} x^\alpha = \frac{\alpha}{\alpha} \log_a x = \log_a x$$

مثالونه.

$$14. \log_2 18 = \log_2 (2 \cdot 9) = \log_2 2 + \log_2 (3^2) = 1 + 2 \cdot \log_2 3$$

$$15. \log_2 128 = \log_2 (2^7) = 7 \cdot \log_2 2 = 7 \cdot 1 = 7$$

$$16. \log_b \left(\frac{xy}{z} \right) = \log_b (xy) - \log_b z = \log_b x + \log_b y - \log_b z$$

$$17. \log_b 4 + \log_b x - \log_b 3 = \log_b (4x) - \log_b 3 = \log_b \left(\frac{4x}{3} \right)$$

$$18. \log_2 \sqrt{11} = \log_2 (11)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_2 11 ;$$

$$19. \log_b \left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log_b \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{2}{3} (\log_b x - \log_b y).$$

طاقت لرونکي او لوگارتمي معادلې

هغه معادلې چې په توان يا لوگارتم کې يې مجهول عدد مطرح کېږي، طاقت لرونکي معادلې يا لوگارتمي معادلې بلل کېږي. په دې ډول معادلو کې ځينې وخت داسې شرطونه مخ ته راځي چې بايد همغه مجهول عدد هغه صدق کړي. دلته ښه داوي چې معادله مستقيماً د لوگارتم او توانونه د قاعدو څخه په استفاده حل کړو او بيا لاس ته راغلي جوابونه په معادله کې ارزيايي شي.

20 مثال. لاندې معادله حل کړئ.

$$\log(x-2) + \log(x-5) = 1$$

حل: د x مجهول عدد بايد د $x-5 > 0$ او $x-2 > 0$ شرطونه صدق کړي، په بل عبارت بايد چې $x > 5$ وي او

$$\begin{aligned} \log(x-2) + \log(x-5) = 1 &\Rightarrow \log[(x-2)(x-5)] = 1 \\ \Rightarrow (x-2)(x-5) = 10 &\Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 10 \Rightarrow x^2 - 7x = 0 \\ \Rightarrow x(x-7) = 0 &\Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 7 \end{aligned}$$

ليدل کېږي چې د $x_1 = 0$ عدد د معادلې شرط نه صدق کوي. په داسې حال کې $x_2 = 7 > 5$ د معادلې يوازني جذر دی.

21 مثال. د $2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\begin{aligned} 2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 = 0 &\Rightarrow (2^x)^2 - 10 \cdot 2^x + 16 = 0 \\ \Rightarrow y^2 - 10y + 16 = 0 &\Rightarrow (y-2)(y-8) = 0 \\ \Rightarrow y_1 = 2 \Rightarrow 2^x = 2 &\Rightarrow x = 1 \\ \Rightarrow y_2 = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 &\Rightarrow x = 3 \end{aligned} \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 3$$

22 مثال. لاندې لوگارتیم معادله حل کړی.

$$\log_{10}[(x-21)x] = 2 \Rightarrow (x-21)x = 10^2 \Rightarrow x^2 - 21x - 100 = 0$$

$$(x-25)(x+4) = 0 \Rightarrow x_1 = 25, \quad x_2 = -4$$

23 مثال. لاندې لوگارتیمی معادله حل کړئ.

$$\log_{10} x + \log_{10} 4 = 2 \Rightarrow \log_{10}(4x) = 2 \Rightarrow 4x = 10^2 \Rightarrow x = 25.$$

اعشاري لوگارتیم (معمولي لوگارتیم)

په دې لوگارتیم کې د 10 عدد د قاعدې په توګه په نظر کې نیول کېږي او په معموله توګه یې د $\log_{10} x$ یا $\log x$ په شکل لیکي

$$\log x := \log_{10} x$$

24 مثال. د ځینو ګړدېو عددونو معمولي لوگارتیم په لاندې ډول فهرست کوو.

x	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000
$\log x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

د لوگارتیم مانتیس او مشخصه.

هر مثبت عدد x کیدلی شي په عملي شکل $x = a \cdot 10^c$ ولیکل شي. دا ډول چې

$1 \leq a < 10$ او c یو تام عدد دی. په دې صورت کې

$$\log x = \log(a \cdot 10^c) = \log a + \log 10^c = \log a + c \log 10 = \log a + c$$

دلته c عدد ته مشخصه (کرکترستیک) او $m = \log a$ ته د $\log x$ مانتیس ویل

کېږي، څرنگه چې $1 \leq a < 10$ نو $0 \leq \log a < 1$ وي.

$$\boxed{0 \leq m < 1} \text{ یعنی}$$

25 مثال

$$a. \quad \log(527) = \log[(5,27) \times 10^2] = \log(5,27) + 2 \Rightarrow c = 2, m = \log(5,27)$$

$$\begin{aligned}
 b. \quad \log(95000) &= \log[(9,5) \times 10^4] = \log(9,5) + 4 \Rightarrow c = 4, m = \log(9,5) \\
 c. \quad \log(0,00005) &= \log(5 \times 10^{-5}) = \log 5 - 5 \Rightarrow c = -5, \quad m = \log 5 \\
 d. \quad \log(1000) &= \log 10^3 = 3 \log 10 = 3 \Rightarrow c = 3, \quad m = 0
 \end{aligned}$$

د مانتيس او مشخصه خاصيتونه

(I) د هغو عددونو د لوگارتيمونو مانتيس چې عين رقمونه او ترتيب ولري، او د اعشاري علامی موقیعت او د هغې د بنی خوا یا کینې خوا د صفرونو په نظر کې نه نیولو سره یو تر بله سره مساوی دي.

26 مثال. که چېرې $\log(4,81) = 0,6821$ وي نو لرو چې

$$\begin{aligned}
 I. \quad \log(48100) &= \log[(4,81) \times 10^4] = \log(4,81) + \log 10^4 \\
 &= 0,6821 + 4 = 4,6821
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 II. \quad \log(481) &= \log[(4,81) \times 10^2] = \log(4,81) + \log 10^2 \\
 &= 0,6821 + 2 = 2,6821
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 III. \quad \log(0,00481) &= \log[(4,81) \times 10^{-3}] = \log(4,81) + \log 10^{-3} \\
 &= 0,6821 - 3 = -3 + 0,6821 = \bar{3}, 6821
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 IV. \quad \log(0,0481) &= \log[(4,81) \times 10^{-2}] = \log(4,81) + \log 10^{-2} \\
 &= 0,6821 - 2 = -2 + 0,6821 = \bar{2}, 6821
 \end{aligned}$$

اوس پورتنی نتیجې فهرست کوو.

لوگارتیم	مانتیس	مشخصه	عدد
4,6821	0,6821	4	48100
2,6821	0,6821	2	481
0,6821	0,6821	0	4,81
-1,3179	0,6821	-2	0,0481
-2,3179	0,6821	-3	0,00481

ليدل کيږي چې د ټولو هغه عددونو مانتيس کوم چې په جدول کې راغلي دي د 0.68219 سره مساوي دي.

(2) د هغو عددونو مشخصه چې د يو څخه لوی دي، يو واحد د هغوی د صحيحو رقمونو له تعداد څخه کم وي.

27 مثال

اعداد	425	9680	2345,9	200000
مشخصه	2	3	3	5

(3) د هغو عددونو مشخصه چې له يو څخه کوچنی وي، منفي عدد دی او د اعشاری علامې څخه د مخه عدد د چپ خوا د صفرونو له تعداد څخه يو واحد کم وي.

28 مثال

اعداد	0,128	0,041	0,00065	0,00001
مشخصه	-1	-2	-4	-5

(4) د لوگارتیم مشخصه له جدول څخه د عدد له مخې د (2) او (3) دستورونو څخه معلومیدلی شي، مگر مانتيس د جدول څخه په لاس راځي.

(5) د يو درې رقمي عدد 493 مانتيس په 49 سطر او 3 ستون کې دی، او د 598 مانتيس بيا په 59 سطر او 8 ستون کې قرار لري (ددرې رقمي جدول څخه) دلته د یادونه وړ ده چې په درې رقمي جدولونو کې د 1 څخه تر 99

عددونو لپاره مانتيس ليکل شوی وي. مگر بيا په څلورور رقمي جدولونو کې د 1 څخه تر 999 عددونو پوري مانتيس ترتيب شويدي.

(6) د يو عدد لوگارتيم د مشخصه او مانتيس د يو ځای کولو څخه په لاس راځي.

29 مثال

$$I. \log(48100) = 4 + 0,6821 = 4,6821$$

$$II. \log(0,00481) = -3 + 0,6821 = \bar{3},6821$$

او بايد يادونه وکړو چې

$$\bar{3},6821 = -3 + 0,6821 = -2,3179$$

انتي لوگارتيم.

که چېرې $y = \log x$ وي، په دې صورت کې $x = 10^y = \text{anti log } y$. د مثال په توگه

$$\log 1000 = 3 \Leftrightarrow \text{anti log } 3 = 10^3 = 1000$$

که چېرې ديو عدد لوگ معلوم وي نو دهغې د صحيحو رقمونو تعداد او يا د اعشاري علامې ځای د هغې عدد د مشخصې او د ارقامو د ډول په مرسته د مانتيس په وسيله له جدول څخه پيدا کيږي.

30 مثال . د N عدد معلوم کړئ داسې چې $\log N = 1,7016$ وي.

حل: ليدل کيږي چې $m = 0.7016$ او $c = 1$ دی. بنا پر دې دصحيحو

رقمونو شمېر د مشخصې په ملاحظه 2 دی. خو څرنگه چې د هغې مانتيس

$m = 0.7016$ په جدول کې د 503 مربوط دی نو بايد عدد $N = 50,3$

وي.

31 مثال . د N عدد دا ډول معلوم کړی چې $\log N = -2.3179$ وي.

حل :

$$\log N = -2,3179 = -2 - 0,3179 = -3 + 1 - 0,3179 = -3 + 0,6821$$

په دې ترتیب سره $m = 0.6821$ او $c = -3$ دی. څرنگه چې

$m = 0.6821$ عدد په جدول کې د 481 عدد مانتیس دی. نو ددې په

نظر کې نیولو سره چې د N مشخصه د -3 عدد دی په نتیجه کې

$N = 0.00481$. دیادونې وړ ده چې

$$\log N = -2.3179 \Leftrightarrow N = 10^{-2.3179} = 0,00481$$

انترپولیشن

د یو درې رقمي عدد مانتیس د درې رقمي جدول څخه او دیو څلور رقمي

عدد مانتیس له څلور رقمي جدول څخه معلومیدلی شي. خو کله چې دیو عدد

رقمونو شمیر له دریو یا څلورو څخه زیات وي نو نشو کولی د هغې مانتیس له

اړونده جدول څخه په لاس راوړو. په دې اړه ددې په نظر کې نیولو سره چې د

لوگاریتمي تابع متزایده وي او د هغې قیمتونه په کوچنیو انټرولونو کې تقریباً په

خطی توګه زیاتوالی کوي. ددې پر اساس د عددونو او د هغوی د لوگاریتمونو

تر منځ تفاوت په مستقیمه توګه متناسب فرض کیدلی شي.

ددې فرضیې په نظر کې نیولو سره د عددونو د مانتیس د پیدا کولو لپاره یو

روش وجود لري چې د خطي انټرپولیشن په نامه یې یادوي.

د مثال په توګه د $\log 5.235$ په حسابونه کې د 5.235 مانتیس د یو درې

رقمی جدول له مخې د پیدا کولو وړ نه دی. مګر دوه درې رقمي عددونه

پیدا کولی شو چې دا عدد یې تر منځ پروت وي یعنې

$$5.23 < 5.235 < 5.24$$

په داسې حال کې چې د 5,23 او 5,24 د لوگارتمونو مانتيسونه په جدول کې شته دي. نو د حسابونې شکل يې په لاندې ډول مطرح کېږي

$$\begin{array}{cc} N & \log N \\ 0.010 \left\{ \begin{array}{l} 5.230 \\ 5.235 \\ 5\ 240 \end{array} \right\} 0.005 & d \left\{ \begin{array}{l} 0.7185 \\ x \\ 0\ 7193 \end{array} \right\} 0.0008 \end{array}$$

د لوگارتم فرق	د عددونو فرق
0.0008	0.01
d	0.005

بناېږدې

$$\Rightarrow \frac{0.01}{0.005} = \frac{0.0008}{d} \Rightarrow d = \frac{(0.005)(0.0008)}{0.01} = 0.0004$$

په نتيجه کې

$$x = \log 5.235 = \log 5.23 + d = 0.7185 + 0.0004 = 0.7189$$

که چېرې د 52350 عدد مانتيس مطلوب وي. بيا هم عين طريقه کارول کېږي داسې چې په هغې کې د انتي لوگارتمونو تفاوت لټول کېږي. د مثال په توګه $\log N = 1.7206$ وي نو د N عدد معلوم کړی. دلته مانتيس يعنې 0.7206 په درې رقمي جدول کې موجود نه دی، مګر دوه مانتيسونه په جدول کې پيدا کولی شو چې پورتنی مانتيس يې تر منځ پروت وي او هغه يو 0.7202 دی چې په 5,250 عدد پورې اړه لري او بل 0.7210 دی چې په

5, 60 عددی پورې تړلی دی. په دې ترتيب د حسابونې شکل په لاندې ډول طرحه کېږي.

$$N \qquad \log N$$

$$0.010 \left\{ \begin{matrix} 5.250 \\ y \\ 5.260 \end{matrix} \right\} d \quad , \quad 0.0004 \left\{ \begin{matrix} 0.7202 \\ 0.7206 \\ 0.7210 \end{matrix} \right\} 0.0008$$

د مانټيسونو تفاوت	د عددونو تفاوت
d	0.0004
0.010	0.0008

$$\Rightarrow \frac{d}{0.010} = \frac{0.0004}{0.0008} \Rightarrow d = \frac{(0.0004)(0.010)}{0.0008} = 0.005$$

$$\Rightarrow y = 5.250 + d = 5.250 + 0.005 = 5.255$$

يادداشت. کله کله په حسابونو کې د لازم دقت په کارولو سره، د عددونو مانټيسونه، د مثال په توګه د 4563 او 456 عددونو مانټيسونه، يو تر بله سره مساوی فرض کيدلی شي. نو د حسابونې د غوښتنو سره سم کولی شو ددرې رقمي عددونو څخه د زياتو رقمونو د عددونو مانټيسونه د هغوی ددرې رقمي عددونو مانټيسونو ته حواله کړو. او د انټرپولیشن څخه صرف نظر وکړو. په همدې ډول انټي لوګارتم په تقريبي توګه له جدول څخه تخمين کيدلی شي.

نن ورځ د حساب د جیبي ماشین په وسیله لوګارتمې او د طاقت تابع ګانې حسابيدلی شي. په دې ترتيب سره د لوګارتم جدولونه په اوسني وخت کې له کاره په لويډو دي.

طبیعی لوګارتم

طبیعی لوګارتم چې قاعده یې د اویلر عدد ($e=2.718281\dots$) په نظر کې نیول کېږي د ریاضي د قضیو او دعوو د ثبوت او له دې جملې څخه د لیمیت، مشتق او نورو د حسابونو لپاره زیاته کارونه لري. او عبارت دی له

$$\ln x := \log_e x$$

$$e = 2.7182818285 \dots$$

څرنگه چې $e^{\log_e x} = x$, $\log_e e^x = x$ بنډې

$$e^{\ln x} = x, \ln e^x = x$$

د اعشاري او طبيعي لوگارتيمونو تر منځ رابطه

د دوی ددواړو قاعدې 10 او e په نظر کې نیسو او د لاندې رابطې څخه په ګټه اخیستنه لرو چې

$$\log_a x \log_b a = \log_b x$$

$$\log_{10} x \log_e 10 = \log_e x \Rightarrow \log x \ln 10 = \ln x$$

$$\log_e x \log_{10} e = \log_{10} x \Rightarrow \ln x \log e = \log x$$

خو د لاس ته راغلي حسابونو څخه

$$\log e = 0,434294 \dots, \ln 10 = 2,302584 \dots$$

د اعشاري لوگارتيم کارونه (استعمال)

د اعشاري د لوگارتيم په کارونې سره دارنگه محاسبې سرته رسیدلی شي چې په عمل کې هغه مشکلي يا حتی ناممکنې وي. د لوگارتيم عمليې کولی شي ضرب په جمع، تقسیم په تفریق، توان په ضرب او جذر په تقسیم واړوي او د حسابونې په جریان کې په طبیعي توګه د جدول کارونې او انترپولیشن طریقې ته ضرورت پېښېږي.

که غواړو د مثال په توګه $(1.08)^{65}$ حساب کړو. نو دا یو ګران کار دی یا که وغواړو $\sqrt[52]{954658}$ لاس ته راوړو، نو دا یوه ناممکنه عملیه ده. خو د لوگارتيم په مرسته دا دواړه حسابونې لاس ته راتلی شي.

د طاقتنما تابع گانو د ډلکيو (کلاسونو) مشتق او ليمتونه د طبيعي لوگارتيم په مرسته په اساني سره سرتنه رسېږي.

32 مثال. د $p = 100(1.08)^{10}$ عدد حساب کړئ.

$$\begin{aligned}\log p &= \log[100(1.08)^{10}] = \log 100 + \log(1.08)^{10} = 2 + 10\log(1.08) \\ &= 2 + 10(0.0334) = 2.334 \Rightarrow \log p = 2.334 \\ \Rightarrow p &= \text{anti log}(2.334) = 215.8 \Rightarrow 100(1.08)^{10} = 215.8\end{aligned}$$

33 مثال. $q = (7.284)^5$ حساب کړئ.

$$\begin{aligned}\log q &= \log(7.284)^5 = 5\log(7.284) = 5(0.8623) = 4.3115 \\ q &= \text{anti log}(4.3115) \Rightarrow q = 20490 \Rightarrow (7.284)^5 = 20490\end{aligned}$$

تمرین

- لاندې رابطې په لوگارتيمي عبارت واورئ.

$$1. \quad p^q = r \quad , \quad 2. \quad 2^4 = 16 \quad , \quad 3. \quad 8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$$

- لاندې رابطې د توان په شکل وليکئ.

$$4. \quad \log_3 81 = 4 \quad , \quad 5. \quad \log_{0.1} 100 = -2 \quad , \quad 6. \quad \log_3 \frac{1}{9} = -2$$

- د لاندې عددونو د هريو قيمت معلوم کړئ.

$$7. \quad \log_{\frac{1}{3}} 8 \quad , \quad 8. \quad \log \sqrt[3]{10} \quad , \quad 9. \quad \log_5 125 \sqrt{5}$$

- لاندې معادلې حل کړئ.

$$10. \quad \log_5 x = 2 \quad , \quad 11. \quad \log_4 y = -\frac{3}{2} \quad , \quad 12. \quad \log_x 81 = 4$$

- لاندې افادې د لوگارتم د قاعده په کارونو سره د لوگارتم د مجموع په توګه وليکي.

$$13. \log_a(xyz) , 14. \log_a \frac{uv}{w} , 15. \log \frac{u^2}{v^2}$$

$$16. \log \frac{u^2 v^3}{w^4} , 17. \log \frac{u^{\frac{1}{2}}}{v^{\frac{2}{3}}} , 18. \log \sqrt[5]{x^3 y^{-2} z}$$

- ددې په نظر کې نيولو سره چې $\log 3 = 0.4771$ ، $\log 2 = 0.3010$ او $\log 5 = 0.6990$ ، $\log 7 = 0.8451$ دي، لاندې عددونه حساب کړئ.

$$19. \log 105 , 20. \log 108 , 21. \log \sqrt[3]{72} , 22. \log 2100$$

- دا لاندې هره يوه افاده د لوگارتمي يو حده افادې په توګه وليکي.

$$23. \log 3 - \log 8 + \log 24 , 24. \log 6 - 2 \log 3 + \log 54$$

$$25. \log x - 5 \log y + 4 \log 7 - 10 \log x + \log xyz + \log x$$

- د لاندې عددونو هر يو د لوگارتم مشخصه معلومه کړئ.

$$26. 45000 , 27. 19.234 , 28. 0.00013 , 29. \log 0.23$$

- د $\log 87.2 = 1.9405$ په پام کې نيولو سره، لاندې لوگارتيمونه په لاس راوړئ.

$$30. \log 87200 , 31. \log 0.00872 , 32. \log 0.872$$

- په لاندې رابطو کې د x عدد پيدا کړئ.

$$33. \log_x 0.00001 = 5 , 34. \log_{0.01} x = -3 , 35. \log_{10} x = -4$$

- د N عدد مشخص کړئ دا ډول چې

$$36. \log N = 5 , 37. \log N = -5 , 38. \log N = -1$$

- لاندې افادې ساده کړئ.

$$39. \log_x (\log_a a^x) , 40. \log_3 (\log_3 27) \cdot \log_2 (\log_2 64)$$

اتم څپرکی

د ریاضي اندکشن او بینوم توصعه

د ریاضي د رابطو او قضیو د ثبوت لپاره درې طریقې رواج لري. چې هغه مستقیم، غیر مستقیمه طریقه او د ریاضي استقرار طریقه دي. په مستقیمه طریقه کې د قضیې د فرضیو د مستقیم تحلیل څخه یوه بیانيه په مستقیم ډول ثبوت کېږي.

په غیر مستقیمه طریقه کې د مطلوبه نتیجې برعکس په نظر کې نیول کېږي او ددې فرضیو د تحلیل څخه وروسته د نادروستو یا غیر ممکنو نتیجو ثبوت په لاس راکوي. چې د هغې بنیاد همغه د اصلي فرضیې، په خلاف د فرضیې په نظر کې نیول بلل کېږي. په دې ترتیب په غیر مستقیمه توګه مطلوبه نتیجه ثبوت کېږي. خو دلته د ریاضي د استقرار طریقه چې د طبیعي عددونو اړونده رابطو او د قضیو په ثبوتونو کې ترې کار اخیستل کېږي، تر مطالعې لاندې نیسو او دهغې په مرسته د بینوم (دوه حده) په انکشاف باندې بحث کوو.

ریاضي اندکشن (ریاضي استقرار)

په دې روش کې د n طبیعي عددونو $P(n)$ خاصیت د ثبوت لپاره دې مرحلې په نظر کې نیول کېږي.

لومړۍ مرحله. د $P(n)$ خاصیت ثبوت د کوچني طبیعي عدد n (ډیر وخت د $n=1$) لپاره ثبوت او تائید کېږي.

دویمه مرحله. په دې مرحله کې فرض کېږي چې د $P(n)$ خاصیت د اختیاري طبیعي عدد $n=k$ لپاره درست وی.

دریمه مرحله. د دوهمې مرحلې له مخې د $P(n)$ ادعا د $n=k+1$ لپاره ثبوت کېږي.

مثال 1. د ریاضي استقرار په مرسته ثبوت کړئ چې:

$$P(n): 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \dots \quad (i)$$

حل: لومړی قدم باید ددې حکم صحت د $n = 1$ لپاره وښیو. نو په پورتنۍ رابطه کې د n پر ځای د 1 عدد ږدو. که چېرې تساوي صدق شي نو دا به ثبوت شوي وي چې $P(1)$ صحیح ده.

$$P(1) \Rightarrow 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

دوهم قدم. فرض کوو چې زموږ ادعا د $n = k$ لپاره درسته ده، یعنې

$$P(k) \Rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad \dots \quad (ii)$$

دریم قدم. د (ii) رابطې څخه په استفاده ثبوت کوو چې پورتنی حکم د $n = k + 1$ لپاره درست دی. په دې منظور (ii) رابطې دواړه خواو ته $k + 1$ زیاتوو

$$\begin{aligned} (1 + 2 + 3 + \dots + k) + (k + 1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) \\ \Rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ \Rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

په دې ترتیب نوموړی حکم د $n = k + 1$ لپاره صدق کوي. او په نتیجه کې د هر طبیعي عدد $n \geq 1$ لپاره صحیح دی.

2 مثال: د استقرار روش وکاروی او لاندې بیانيه ثبوت کړئ.

$$P(n): 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1) \quad \dots \quad (i)$$

حل:

لومړۍ قدم باید ددې حکم درست والی د $n = 1$ لپاره دښیو یعنی په پورتنۍ رابطه کې د n پر ځای د 1 عدد ږدو ، که چېرې هغه تساوي صدق کړي نو ثابت شوی به وي چې $P(1)$ درست دی. لیدل کیږي چې

$$P(1) \stackrel{n=1}{\Rightarrow} 2 = 1(1+1) = 2$$

دوم قدم : فرض کوو چې زموږ ادعا د $n = k$ لپاره درسته ده، یعنی

$$P(k) \stackrel{n=k}{\Rightarrow} 2 + 4 + 6 + \dots + 2k = k(k+1) \quad \dots \quad (ii)$$

دریم قدم: د (ii) رابطې په استناد ثبوت کوو چې حکم د $n = k+1$ لپاره درست دی ددې لپاره د (ii) رابطې دواړه خواو ته $2(k+1)$ زیاتوو.

$$(2 + 4 + 6 + \dots + 2k) + 2(k+1) = k(k+1) + 2(k+1)$$

$$\Rightarrow 2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k+1) = (k+1)(k+2)$$

او حکم د $k+1$ لپاره صدق کوي.

3 مثال. ثابت کړئ چې د هر طبیعي عدد n لپاره لاندې رابطه درسته ده.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

حل: د $P(n)$ خاصیت د هر طبیعي عدد n لپاره په لاندې ډول په نظر کې نیسو.

$$P(n) : \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

لومړۍ مرحله: د $k=1$ لپاره

$$P(1) : 1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = 1$$

نو $P(1)$ درسته ده.

دوهمه مرحله: اوس فرض کوو چې $P(k)$ د طبیعي عدد k لپاره صدق کوي یعنی:

$$P(k) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

اوس غواړو وښیو چې $P(k+1)$ هم صحیح ده. نو د وروستۍ رابطې دواړو خواو ته $(k+1)^2$ زیاتوو

$$\begin{aligned}
& 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 \\
& \Rightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = (k+1) \left[\frac{k(2k+1)}{6} + k+1 \right] \\
& \Rightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = (k+1) \frac{2k^2 + 7k + 6}{6} \\
& \Rightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6} \\
& \Rightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}
\end{aligned}$$

په دې ترتيب $P(k+1)$ درسته ده.

4 مثال. ثبوت کړئ چې د هر طبيعي عدد n لپاره لاندې رابطه صدق کوي.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

حل: څرنگه چې $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ دی نو د $P(n)$

خاصيت د هر طبيعي عدد n لپاره دا لاندې رابطه ثبوت کړو

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

لومړۍ مرحله: د $k=1$ لپاره لرو چې

$$P(1) : 1^3 = \left[\frac{1 \cdot (1+1)}{2} \right]^2$$

نو $P(1)$ درسته ده يا د $k=1$ لپاره صدق کوي.

دوهمه مرحله: اوس فرض کړو چې د هر طبيعي عدد k لپاره $P(k)$ درسته وي يعنې

$$P(k) : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2} \right]^2$$

درېمه مرحله: دا موضوع د $P(k+1)$ لپاره څپړو او د پورتنۍ رابطې دواړو خواو ته $(k+1)^3$ ورزیاتو.

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 &= \left[\frac{k(k+1)}{2} \right]^2 + (k+1)^3 \\
\Rightarrow 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 &= (k+1)^2 \left[\frac{k^2 + 4k + 4}{4} \right] \\
\Rightarrow 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 &= (k+1)^2 \left[\frac{k^2}{4} + k + 1 \right] \\
\Rightarrow 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4} \\
\Rightarrow 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 &= \left[\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} \right]^2
\end{aligned}$$

په دې ترتیب $P(k+1)$ رابطه درسته ده.

5 مثال. د برنولي نامساوی ثبوت کړئ؟

$$(1+a)^n \geq 1+na, \quad a > 0$$

حل:

لومړۍ مرحله: د $n=1$ لپاره لرو چې

$$(1+a)^1 = 1+1.a \Rightarrow (1+a)^1 \geq 1+1.a$$

نو نوموړي رابطه د $n=1$ لپاره درسته ده.

دوهمه مرحله: فرض کوو چې نوموړی نامساوي د یو کیفی طبیعی عدد k لپاره

درسته ده

$$(1+a)^k \geq 1+ka$$

دریمه مرحله: اوس د وروستۍ رابطې دواړه خواوې په $(1+a)$ باندې ضربوو

$$(1+a)^k (1+a) \geq (1+ka)(1+a)$$

$$\Rightarrow (1+a)^{k+1} \geq 1+a+ka+ka^2 \geq 1+a+ka$$

$$\Rightarrow (1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a.$$

په دې ترتیب نامساوی د $k + 1$ لپاره صدق کوي.

فکتوریل

د یو طبیعي عدد n لپاره یو عددي مفهوم n فکتوریل دا ډول تعریف کیږي.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n$$

یا

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

مګر صفر فکتوریل د 1 سره مساوی تعریف کیږي.

مثالونه

$$6. \quad 1! = 1, \quad 7. \quad 2! = 1 \cdot 2 = 2, \quad 8. \quad 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$9. \quad 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24, \quad 10. \quad 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$$11. \quad \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} = n+1$$

$$12. \quad \frac{9!}{(3!)(6!)} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1)(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$$

$$13. \quad \frac{n!}{(r!)(n-r)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{[r \cdot (r-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1][n-r \cdot (n-r-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1]} \\ = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1)}{r!}$$

د طبیعي عددونو ترکیب

که چېرې r او n دوه طبیعي عددونه وي $0 \leq r \leq n$. په دې صورت د n او r ترکیب عبارت دی له:

$$C_n^r := \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \cdots (n-r+1)}{r!}$$

ځینې د C_n^r د سمبول پر ځای د $\binom{n}{r}$ سمبول کاروي.

مثالونه:

$$14. \quad C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{(3!)(2!)} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1$$

$$15. \quad C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{(2!)(3!)} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$$

$$16. \quad C_5^0 = \frac{5!}{0!(5-0)!} = \frac{5!}{1(5!)} = 1, \quad 17. \quad C_5^5 = \frac{5!}{5!(5-5)!} = \frac{5!}{(5!)0!} = 1$$

د ترکیب خاصیتونه

د دوو طبیعي عددونو r او n لپاره داسې چې $0 \leq r \leq n$ وي لرو چې

$$(i) \quad C_n^{r-1} + C_n^r = C_{n+1}^r$$

$$(ii) \quad C_n^r = C_n^{n-r}$$

$$(iii) \quad C_n^0 = 1 = C_n^n$$

ثبوت

$$\begin{aligned} (i) \quad C_n^{r-1} + C_n^r &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{r(n!)+(n-r+1)n!}{(n-r+1)(n-r)!r(r-1)!} = \frac{n!(r+n-r+1)}{(n-r+1)!r!} = \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} = C_{n+1}^r \end{aligned}$$

$$(ii) \quad C_n^{r-1} = \frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = C_n^r.$$

$$(iii) \quad C_n^0 = \frac{n!}{(0!)(n!)} = \frac{n!}{1(n!)} = 1 = \frac{n!}{(n!)1} = \frac{n!}{(n!)(0!)} = C_n^n$$

مثالونه

$$18. \quad C_9^3 + C_9^4 = \frac{9!}{(3!)(6!)} + \frac{9!}{(4!)(5!)} = \frac{4(9!) + 6(9!)}{(4!)(6!)} = \frac{10!}{(4!)(6!)} = C_{10}^4$$

$$19. \quad C_6^2 = \frac{6!}{(2!)(4!)} = \frac{6 \cdot 5}{2!} = \frac{30}{2} = 15, \quad C_6^4 = \frac{6!}{(4!)(2!)} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15$$

د بېنوم نیوټن قضیه

د حقیقي عددونو a او b او طبعی عدد n لپاره لرو چې

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^r a^{n-r} b^r + \dots + C_n^n b^n$$

ثبوت. (د ریاضی استقرار په طریقه)

لومړۍ مرحله. د $n = 1$ لپاره لرو چې

$$(a+b)^1 = a+b = C_1^0 a + C_1^1 b$$

دوهمه مرحله. فرض کوو چې اصلي رابطه د $n = k$ لپاره درسته وي. یعنې

$$(a+b)^k = C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + \dots + C_k^r a^{k-r} b^r + \dots + C_k^k b^k$$

دریمه مرحله. ددې رابطې دواړه خواوې په $(a+b)$ ضربوو.

$$\begin{aligned} (a+b)^{k+1} &= (a+b)(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + \dots + C_k^r a^{k-r} b^r + \dots + C_k^k b^k) \\ &= C_k^0 a^{k+1} + (C_k^0 + C_k^1) a^k b + \dots + (C_k^{r-1} + C_k^r) a^{k-r} b^r + \dots + (C_k^{k-1} + C_k^k) a b^k + C_k^k b^{k+1} \end{aligned}$$

پوهیږو چې

$$C_k^{r-1} + C_k^r = C_{k+1}^r, \quad C_k^0 = C_{k+1}^0 = C_k^k = C_{k+1}^{k+1}$$

په دې ترتیب

$$(a+b)^n = C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + \dots + C_{k+1}^r a^{k+1-r} b^r + \dots + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1}$$

بنا پر دې قضیه د $n = k+1$ لپاره هم درسته ده.

د بېنوم د ضریبونو مجموعه.

که چېرې په اصلي بېنوم او انکشاف کې یې $a = b = 1$ وضع شي نو لرو چې

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^r + \dots + C_n^n$$

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{r} + \dots + \binom{n}{n}$$

20 مثال.

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a b^4 + C_5^5 b^5 \\ \Rightarrow (a+b)^5 &= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5a b^4 + b^5 \\ a=1=b &\Rightarrow C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 1+5+10+10+5+1=2^5\end{aligned}$$

21 مثال.

$$\begin{aligned}(3x+2y)^4 &= C_4^0 (3x)^4 + C_4^1 (3x)^3 (2y) + C_4^2 (3x)^2 (2y)^2 + C_4^3 (3x)(2y)^3 + C_4^4 (2y)^4 \\ &= (3x)^4 + \frac{5}{1} (3x)^3 (2y) + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} (3x)^2 (2y)^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} (3x)(2y)^3 + (2y)^4 \\ &= 3^4 x^4 + 5 \cdot 3^3 x^3 \cdot 2y + 10 \cdot 3^2 x^2 \cdot 2^2 y^2 + 10 \cdot 3x \cdot 2^3 y^3 + 2^4 y^4 \\ &= 3^4 x^4 + 5 \cdot 3^3 \cdot 2x^3 y + 10 \cdot 3^2 \cdot 2^2 x^2 y^2 + 10 \cdot 3 \cdot 2^3 xy^3 + 2^4 y^4\end{aligned}$$

د بینوم د انکشاف خاصیتونه

1. د $(a+b)^n$ د انکشاف څخه وروسته $n+1$ حدونه لري.
2. د پورتنی بینوم د ضریبونو مجموعه (له انکشاف څخه وروسته) د 2^n سره مساوي دي.
3. نسبت منځ ته د دواړو خوا د متناظرو حدونو ضریبونه سره مساوي دي.
4. د a او b د توانونو مجموعه په هر حد کې د n عدد سره مساوي دي.
5. په k - ام موقعیت کې حد عبارت دی له $C_n^{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k-1}$.

22 مثال. د $(x+y)^{15}$ بینوم اوم حد پیدا کړئ.

حل: ددې بینوم اوم حد عبارت دی له

$$C_{15}^{7-1} x^{15-(7-1)} y^{7-1} = C_{15}^6 x^{15-6} y^6 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} x^9 y^6 = 5005 x^9 y^6$$

23 مثال. د $\left(x^{\frac{2}{3}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)^{10}$ منځنی حد پیدا کړئ.

حل: دلته منځنی حد یعنی شپږم عبارت دی له

$$C_{10}^5 \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^5 \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^5 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^{\frac{10}{3}} x^{-\frac{5}{2}} = 252 x^{\frac{5}{6}}$$

د پاسکال مثلث.

د ترکیب د $C_n^0 = 1 = C_n^n$ ، خاصیتونو په نظر کې نیولو سره، کولی شو له له انکشاف څخه وروسته د یو بینوم ضریبونه په تدریج سره د $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ لپاره د یو عددی مثلث (پاسکال مثلث) په توګه په لاندې توګه فهرست کوو

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & C_0^0 & & \\
 & & & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \\
 C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \\
 C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5
 \end{array}$$

او یا د $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ لپاره د پاسکال مثلث عبارت دی له

				1				
				1		1		
			1		2		1	
		1		3		3		1
	1		4		6		4	
	1	5		10		10		5
1		6	15		50		15	6

د حقيقي عددونو د توانونو لپاره بينوم نيوتن

که چېرې په $(a + b)^\alpha$ بينوم کې α يو حقيقي عدد په نظر کې ونيول شي نو دغه انکشاف عمومي حالت غوره کوي او د $|b| < |a|$ شرطونو لپاره نوموړی بينوم د محاسبې لپاره کتور دی او يوه عددی سلسله جوړوي (د بينوم د انکشاف نه وروسته د حدونو تعداد د هغو توانونو لپاره چې طبيعي نه وي نامتناهی دی) دلته د C_α^k مفهوم په مشخص ډول حسابيږي.

$$C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

د بينوم دغه حالت د محاسبې لپاره زياته کاروړنه لري خو دلته هغه ځای نه لري.

24 مثال. د $(a + b)^{-3}$ پنځه اول حدونه د $|b| < |a|$ تر شرط لاندې وليکئ.

حل:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{-3} &= a^{-3} + (-3)a^{-4}b + \frac{(-3)(-4)}{1 \cdot 2}a^{-5}b^2 \\
&+ \frac{(-3)(-4)(-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{-6}b^3 + \frac{(-3)(-4)(-5)(-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}a^{-7}b^4 + \dots \\
\Rightarrow (a+b)^{-3} &= \frac{1}{a^3} - \frac{3b}{a^4} + \frac{6b^2}{a^5} - \frac{10b^3}{a^6} + \frac{15b^4}{a^7} + \dots
\end{aligned}$$

تمرین

لاندې رابطې د ریاضی د استقرار په طریقہ ثبوت کړئ.

$$1. \quad 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2 - 1)$$

$$2. \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$3. \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$4. \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1) \cdot n = \frac{(n-1) \cdot n(n+1)}{3}$$

لاندې افادو ته انکشاف ورکړئ.

$$5. \quad (3x+2y^2)^5, \quad 6. \quad \left(x^2 + \frac{1}{2}y\right)^6, \quad 7. \quad \left(\frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2x}\right)^6$$

8. د $(x+y)^{13}$ اوم حد پیدا کړئ.

9. د $\left(\frac{2}{x} + \frac{x^2}{2}\right)^{14}$ هغه حد معلوم کړئ چې x^4 پکښې وی.

10. د $\left(y^3 - \frac{x}{3}\right)^9$ هغه حد معلوم کړئ چې y^{12} ولري.

11. د $\left(x^2 - \frac{2}{x^4}\right)^8$ لومړني پيڅه حدونه وليکئ او ساده ئی کړئ.

دا لاندې افادې هره یوې ته تر پنځم حد پوری انکشاف ورکړئ.

12. $(1-x^3)^{-\frac{2}{3}}$, 13. $(1+0.5)^{\frac{1}{2}}$, 14. $(2+0.1)^{-1}$

15. د $\left(x^2 + \frac{3}{2x}\right)^{\frac{5}{3}}$ شپږم حد معلوم کړئ.

16. وښئ چې د $(a-b)^n$ د ضریبونو مجموعه په صفر سره مساوی دی.

مآخذ

- 1- ابوستل، ت. م ۱۳۷۲ ریاضی انالیز (د عالم زاده ۴-۱ ترجمه) د شریف صنعتي پوهنتون د علمی خپرونو موسسه، د شریف د صنعتي پوهنتون چاپخانه دریم چاپ تهران ۴۸۶-۵۶۹ مخونه.
- 2- پور کاظمی، م. ح. ۱۳۷۰، عمومي ریاضیات دوهم ټوک، نشرنی چاپ، تهران ۱۰۸-۱۱، ۳۰۶-۳۲۱ او ۴۳۳-۵۱۹ مخونه.
- 3- عدالتی، ت. او فرخی ح. د ریاضی جغرافیې اصول و مبانی، د استان قدس اضوی موسسې چاپ، مشهد ۱۳۸۰، ۳۹۷-۴۲۵ مخونه.
- 4- قران نویس، م. او جوادې، ح د پوهنتون څخه د مخه فزیک، د ققنوس خپرونې، تهران، ایران، ۱۳۸۳، (۱۰-۱۵) مخونه.
- 5- فرزانه م. او دیبائی م. ت. د ریاضی د تدریس روس، تحصیلی دورې لارښونه، گلشن چاپ، تهران ۱۳۸۰. (۱۰۷-۱۴۰) مخونه.
- 6- ملا فرج زاده، س، ۱۳۷۷ د ریاضیاتو فرهنگ، د احرار د خپرونو چاپ او نشر، تبریز (۲۲۵-۲۹۰) مخونه

7- منصوﺭﻓﺮ، ﻛ ۱۳۷۸، ﺩ ﺍﺟﺘﻤﺎﻋﻲ ﻋﻠﻮﻡ ﻟﭙﺎﺭﻩ ﺩ ﺭﻳﺎﺿﻴﺎﺗﻮ ﭘﺎﻳﻪ (ﺭﻳﺎﺿﻲ ﺍﺳﺎﺳﺎﺕ)، ﺩ ﺍﻧﺴﺎﻧﻲ ﻋﻠﻮﻡ ﺩ ﻣﻄﺎﻟﻌﻲ ﺍﻭ ﺗﺪﻭﻳﻦ ﺳﺎﺯﻣﺎﻥ (ﺳﻤﺖ) ﭼﺎﭘ ﺍﻭ ﻧﺸﺮ، ﺗﻬﺮﺍﻥ، (۱۵۹-۲۰۷) ﻣﺨﻮﻧﻪ.

8- ﻧﯩﻜﻮ ﻛﺎﺭ، ﻣ. ﻭ ﻓﺮﺯﺍﻡ، ﻣﻚ. ۱۳۸۱، ﺩ ﭘﻮﻫﻨﺘﻮﻥ ﺷﺨﻪ ﺩ ﻣﺨﻪ ﺭﻳﺎﺿﻴﺎﺕ، ﺩ ﺍﺳﺎﺳﻲ ﻋﻠﻮﻡ ﺩ ﺧﭙﺮﻭﻧﻮ ﻧﺸﺮﻳﻪ، ﺗﻬﺮﺍﻥ (۲۲۷-۲۴۷) ﻣﺨﻮﻧﻪ.

9- Ayres, F. J.R. 1964, *Calculus*, Schoum Publishing Co. New York, pp. 129 -158, 162 – 180. 283 -330.

10- Ayres, F. J.R. 1962, *First Year College Mathematics*, Schoum Publishing Co., New York, pp. 417 – 427.

11- Barnett , R.A. , Ziegler M.R. and Byleen K.E. 1999 ,*College Algebra , Sixth Edition , Adivision of The McGraw-Hill Companies , boston ,USA , pp. 488-540*

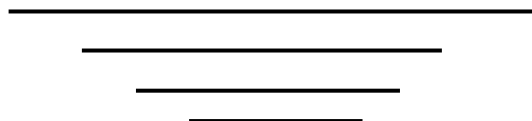
12- Bermant, A. I. and Aramanovich I.G. 1979, *Mathematical Analysis*, Mir Publishing, Moscow,, pp. 258 – 343 , 365 – 568 . .

13- Cohen, D. 1990, *Precalculus*, California, Los Angeles, pp. 411 -449.

14- Demidovich, B.; 1981, *Problems Mathematical Analysis*, Mir Pub. Moscow, pp. 180 – 318.

- 15- Demidovich, B.P. and. Maron I.A. 1981, *Computational Mathematics* .Mir Publishers .Moscow, pp.127 -135 , 229 -269.
- 16- Karl, J.S. 1998, *Trigonometry For College Students*, Brook/Col Publishing Co .Washington. p. 125.
- 17- Kindle, H.J. 1964, *Analytic Geometry*, Schoum Publishing Co., New York, pp. 258 – 272, 278, 279, 283 – 330... .
- 18- . Maqsood, A. *Mathemahics*7, New Star Book Depot, Lahor 2004, p p.21 – 65 .
- 19- Maqsood, A. *Mathemahics*8, New Star Book Depot, Lahor, 2004, p p.1 – 87.
- 20- . Mira J.A. *Arithmetic Clear and Simple*, Booksellers, New York, 1968, pp.1-158.
- 21- .Palmer C.I. and Bibb S.F.*Practical Mathematics*, McGraw – Hill , Book Company ,New York 1946, pp.1- 161
- 22- Piskunov , S.M. 1981, *Differential and Integral Calculus*, 1 vols. Mir Pub. Moscow .pp. 158 – 211, 216 – 247, 253 – 319.

- 23- Robert, B. 1997, *Intermediate Algebra for College Student Second Edition*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.p. 819, 843, 858.
- 24- Spiegel , M.R. 1961, *Statistics, Schaum, s Outline Series*, New York, .pp.45 -64.
- 25- Thomos ,G.B .and Finny ,R.L. 1996 , *Calculus and Analytic Geometry* , Addison – Wessley ,New York , USA , PP.1001 - 1134 .
- 26- Stein E.I. *Refresher Arithmetic* , USA,Allyn and Bacon
, INC, 1961, pp. 109 -200, 220,333.



**Get More e-books from www.Aghalibrary.com
Aghalibrary.com: The Digital Library**