الجبرون

ALGEBREN

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

لیکوال:

ډاکټر ماخان (میړی) شینواری

Downloaded From AWK Library
awklibrary.com

نيوليک

سريزه .... الف

شميرپوهنيزې نخښې............ ت

۱ . ګڼونډېرې ۱

۱ . ۱ طبيعي ګڼونډېرې ۱

۱ . ۲ د ټول ګڼونډېرې ۴

۱ . ۳ ريشنل ګڼونډېرې ۵

۱ . ۴ رييل ګڼونډېرې ۷

۱ . ۵ ايماګينار ګڼونډېرې ۷

۱ . ۶ کمپلکس ګڼونډېرې ۸

۲ . ډېرپپوهنيزې ستڼکليمې ۱۱

۲ . ۱ ډېرې ۱۱

۲ . ۲ خلډېرې يا ضرب ډېرې او اړيکې يې... ۲۶

۲ . ۳ نيمنظم يا نيمترتيب ۳۶

۲ . ۴ مينيمالشرطونه ۳۸

۳ . الجبري جوړښتونه ۴۱

۳ . ۱ ګروپ ۴۴

۳ . ۲ بدن يا تن او کړې ۵۹

نورمي شوې ټولينوم ۶۶ څه مانا لري

۳ . ۳ . لانديګروپ او لاندې کړې ۷۰

۳ . ۴ ايزومورفيزم ۸۰

۳ . ۵ د نیمګروپ په ګروپ او کړی په یوه (ناضرور
کموتاتیو) تن یا بدن کی خوندیونه ۹۲
۳ . ۶ نورمالپرویشنه ۹۵
۳ . ۷ ایدیال او پاتیتهولګیکړی ۱۰۵
۴ د بول الجبر، سرکټ الجبر......... ۱۱۶
۴ . ۱ د ول الجبر سټ کلیمی ۱۱۶
۴ . ۲ د بول فنکشنونه او پولینومونه ۱۲۹
سویچ الجبر یا بریښناجریان الجبر ۱۴۶
۵ الجبرونه..................... ۱۵۶
یو څو بنسټکلیمی ۱۵۶
۵ . ۲ لاندې الجبر یا سب الجبر ۱۷۳
۵ . ۳ ایزمورفیزم ، هوموموروفیزم ۱۸۰
۶ . ترونونه یا ترونی ۲۰۷
۶ . ۱ ترونی او مکمل - یا پوره ترونی.. ۲۰۷

۱ ګڼونډيري

د دې لپاره، چی دا د الجبر کليمی مو پوره څېړلی وي او ښه پوهور شي، نو په سر کي غواړم هغه د ښوونځي بايد (چی متآسفانه دا مو په هيواد کي، په دې نامه نه وو نومولي) ورسره بلد، د ګڼونو ډيري يو په بل پسی تعريف کړم، يا بهتره لنډه ګوته ورته ونيسم او دا په هغو کی د باوري کارونو يا اپريشنونو يا عمليو او يا ګنډنو او يا د تړونونو په ښنسټ.

۱ . ۱ طبيعي ګڼونډيری

Die Menge der natürliche Zahlen

(the set of non negative integer)

دا د ګڼونو ډيری چی صفر ورسه نه وي په لاندې ډول دی:

$$N = \{ 1,2,3,...,n , ... \}$$

دا لاندې د طبيعي ګڼونو ډيري دی، چی صفر ورسره دی، يا په بل عبارت : د طبيعي ګنونو ډيری د صفر سره

$$N^* = \{0,1,2,...,n,...\}$$

په دې ډيري کی لاندې شيمر قاعدې باور لري

.

.

.

۱ . ۱ . ۲ په طبیعي ګڼونو کی شمیرقاعدې

الف : و زیاتون ته یا بهتره، نسبت وزیاتون ته:

اول : د هرو دوه طبیعی ګڼونو $a,b \in N$ لپاره، و زیاتون ته، یا نسبت وزیاتون ته، یو دریم طبیعي ګڼ $c \in N$ شته د کومو لپاره چی باور لري: $a + b = c$

دوېم : اسوشیاتیو قانون Assotiative : د طبیعي ګڼونو لپاره د اسوشیاتیو قانون باور لري:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

دریم : کموتاتیو قانون commutative : د طبیعي ګڼونو لپاره د کموتاتیو قانون باور لري، یعني:

$$a + b = b + a$$

څلورم: بي تاثیره یا ناپیلی توکی das neutrales Element: په طبیعي ګڼونو کی چی صفر ورسره وي باور لري

$$a + 0 = 0 + a = a$$

صفر د طبیعي ګڼونو ناپیلی یا بهتره بی تاثیره توکی بلل کیږي.

ب : و ځل ته یا بهتره نسبت ځل ته

اول : د هرو دوه طبيعى گڼونو a , b ∈ N لپاره يو دريم طبيعى گڼ c ∈ N شته، د كومو لپاره چې باور لري

$$a.b = c$$

دوم : د طبيعي گڼونو a,b,c ∈ N لپار اسوشياتيو قانون باور لري

$$(a . b) . c = a . (b . c)$$

دريم : د طبيعي گڼونوډيري كى كموتاتيو قانون باور لري

$$a . \; b = b . a$$

څلورم. نسبت و ځل ته ناپيلي يا بهتره بي تاثيره توكى : كه طبيعي گنونه له 1 سره ځل شي، نو بيرته پخپله همغه طبيعي گڼ لاس ته راځي

$$1 . a = a . 1 = a$$

دا 1 د طبيعي گڼونو يو ناپيلى يا بي تاثيره توكى بلل كيږي، چې يوى(دا ځكه يوى بولو ، چې بايد له يو سره يى توپير شوى وي) يي بولو

يادونه : د ويشكورو، چې يوى له بل څخه توپير ولري دا شي.

يادونه : په پورته نښلونو كى دي ته پام وي، چې وركړ شوي توكى يو د بل څخه بايد توپيريدونكى نه وي، كيدى شي، چې يو له بل سره مساوي هم وي يا بهتره همغه توكي وي.

ګورو چی په طبیعي ګڼونډیري کی، نسبت و زیاتون ته، د
هر توکی لپاره د هغه په څټ یا برعکس ګڼ نه شته، نو له
دې امله مجبوریږو، چی د طبیعی ګڼونو ډیری د ټولګڼونو
ډیري ته پراخ کړو،

۱ . ۲ د ټولګڼونوډیری die Menge der ganze Zahlen :

د ټولګڼونو ډیری، د طبیعي ګڼونو ډیری د صفر او د دې
طبیعي ګڼونو د توکو په څټ ګڼونو ډیری دی، چی په Z
سره یی ښایو او داسی یي لیکو

$$Z = \{ ...,-n, ..., -3,-2,-1,0,1,2,3,...,n,...\}$$

په ټولګڼونو ډیري کی هغه په طبیعی ګڼونډیري کی باوري
نښلونی یا عملیي باور لري او په دې برسیره د هر یوه ګڼ
لپاره د هغه په څټ ګڼ نسبت و زیاتون ته هم موجود دی،
یعنی لاندې باور لري:

د هر ټولګڼ $a \in Z$ لپاره د هغه په څټ ګڼ یعنی $-a \in Z$
موجود دی، چی دا لاندې باوري کوي:

$$a + (-a) = a - a = -a + a = 0$$

دلته $-a$ د a په څټ ګڼ یا inverse دی نسبت و زیاتون ته.
دې ته طبعاً پام شته، چی د مثبت ګڼ څل د منفی ګڼ

.

.

سره منځ ته راغلی، چی نتیجه یی یو منفی ګڼ دی، دا په دې مانا، چی دلته اصلي نښلونه یا عملیه زیاتون دی او نه . (ځل).

یادونه : زیاتون دوه ځایزه عملیه binäre Operation یا نښلونه ده او په څټ عملیه یوه یوځایزه عملیه unäre Operation یا نښلونه ده.

ګورو، چي د ټولګڼونو په ډېري کی د ځل لپاره د ګڼونو په څټ ګڼونه inverse Zahlen نه دي تعریف، یعنی د یوې افغانی یو په څلورمه (1 / 4) یو ټولګڼ نه دی، نو له دې امله باید د ټولګڼونو ډیری و ریشنل ګڼونو Q ته پراخه شی .

۱ . ۳ **ریشنل ګڼونه** rationale Zahlen :

د ریشنلګڼونو ډیری له دې امله د ټولګڼونو ډیری Z او د ټولو ماتګڼونو ډیري a / b څخه جوړ دی، چي په Q سره يي په نخښه کو او په لاندې ډول يي لیکو :

$$Q = \{ Z , a/b , a,b \in Z , b \neq 0 \}$$

دا داسی لوستل کیږي : ډیری Q مساوي دی د ټولګڼونو ډیری Z اود مات ګڼونو a / b ډیري سره، $a , b \in Z$.

د ریشنلګڼونو ډیري کی، هغه په Z کی ټول د شمیرقوانین باور لري او په دې برسیره د هر ګڼ لپاره نسبت و ځل ته د هغه په څټ ګڼ هم موجود دی ، یعنی په ریشنل ګڼونو کی د هر ګڼ a ∈ Z لپاره یو b ∈ Z موجود دی د کوم لپاره چې باور لري:

$$a \cdot b = 1 \Rightarrow b = 1/a,\ a \neq 0$$

دلته a باید د صفر سره برابره یا مساوي نه وي، ځکه، چی په صفر ویش نه دی تعریف.

ګورو چی ددوه په څټ ګڼونو ځل د ریشنلګڼ یو یوی راکوي. یوی هغه توکی دی، چی د ریشنلګڼون ډیري هرتوکی سره د ځل نښلونه کی بې تاثیره پاتې کیږي یا ناپیلی. دا یوی موږ له دې امله ناپیلیdas neutrale Element او یا هم بی تاثیره توکی بولو.

په پورته ګڼونو کی توان تعریف دی، یعني هر ګڼ د خپل ځان سره ځل کیدنه شته، خو د دې په څټ کارونه یاعملیه یا بهتره نښلونه موجود نه ده، نو له دې امله باید دا ګڼونډیری نور هم پراخه شي. یعني د ګڼون ریښه هم باید په ګڼونډیري کی باور ولري. د بیلګي په توګه د ۲ ریښه یعنی $\sqrt{2}$ په ټولګڼونوکی نه دی تعریف. دا پراختیا مو رییلګڼونډیری ته لاربښودوي، چي

په R سره ښايو يا نخښه کوو.

۱ . ۴ رييل گڼونډيرى R :die Menge der reelen Zahlen

د هغو گڼونوډيرى، چى له ريښو جوړ وي، هغه مو ږ د ايريشنل گڼونوډيرىdie Menge der irationale Zahlen بولو چى په Q_i سره يى په نخښه کو . د رييل گڼونډيرى ياد رييل گڼونو ډيرى په دې توگه بيا د ريشنل گڼونو ډيري او د ايريشنلگڼونو ډيري د ټولنى څخه جوړ دى يعنى

$$R = Q \ U \ Q_i$$

يادونه : په پورته او راتلونکى کي که U راشي، نود ټولنى په ځاي به يى ځاي نيولى وي، که بل نوم ورسره مل نه وي.
په دې ډيري کي د هرنامنفى گڼ لپاره د هغه گڼ ريښه موجود ده. د رييلگڼونوډيرى. بيا تکراروووو، چى د ټولو ريشنلگڼونو ډيري څخه عبارت دى، چى د نامنفي ريشنلگڼونوگڼونو ريښى هم ورزياتي شي.
په رييلگڼونو کي د ريشنل گڼونډيري ټول قوانين باورلري او په همدې ډول په R کى د هر مثبت گڼ a ريښه هم موجود ده، يعني $\sqrt{a}$ موجود ده، چى a منفي گڼ نه وي. دا ريښه نيونه يو يوځايز اپريشن يا عمليه او يا ښبلونه ده.

.

دلته هم سملاسی راته جوته کیږي، چی د ریښي یا بهتره د مربع ریښی د منفی ریښه نیونکي یا ریښه ایستونکی ګڼ ریښه نه ده تعریف، نو له دې امله باید د رییلګڼونوډیری د کمپلکس ګڼونډیری‌ته پراخه شي.

۱ . ۵ ایماګینار ګڼونډیری:د ټولو منفی ګڼونو ریښوډیري ته ایماګینار ګڼونډیری وایو die Menge der imaginäre Zahlen .
او دا په I سره په نخښه کوو. دا هغه ګڼونه i دي، د کومو لپاره چي باور لري: $i^2 = -1$. یانی $i = \sqrt{-1}$, نو که b یو رییلګڼ وي، نو ib یو ایماګینار ګڼ دی .
اوس راځو د کمپلکس ګڼونو ډیري تعریف ته :

۱ . ۶ کمپلکس ګڼونډیری

die Menge der komplexen Zahlen

کمپلکس ګنونډیری د رییلګڼونډیری او ایماګینارګنونډیري ټولنی ته وایي.یاني که ایماګینارګڼ د I سره په نخښه کړو نو کمپلکسګڼ چی د C سره یي په نخښه کوو، دی

$$C = R \cup I$$

دلته له دې پیژندنی یا تعریف څخه روښانیږي، چی کپلکس

ګڼونه دوه برخی لري، رييله برخه او ايماګينار برخه، نو له دې امله د کمپلکس ګڼونو په ډيري کی ټولی نښلونی يا عمليې، چی په رييل ګڼونډيري او ايماګينار ګڼونډيري کی باور لري، باوري دي. او برسيره پردې، دا لاندې قوانين هم باور لري:
دلته که $z = a + ib$ يو کمپلکس ګڼ وي، چی a رييله برخه او $ib = bi$ يی ايماګينار يا ايماجينار برخه ده. او س راځو شميرقوانينو ته:

الف : $i^5 = i \quad i^4 = 1 \quad i^3 = -i \quad i^2 = -1$

په ټوليزه توګه:

$$i^{4n+2} = -1 \qquad i^{4n+3} = -i \quad i^{4n+4} = +1 \qquad i^{4n+5} = i$$

ب –

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 + b_2)$$
$$z_1 . z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

کيدی شي، چی وي $z^* = \bar{z} = a - ib$ ، نو دا ګڼ
و $z = a + ib$ ته يو کونجوګيري کمپلکس ګڼ بلل کيږي

پ–

$$z.z^* = z.\bar{z} = (a+ ib)\,(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

دا پورته د جملو يا قضيو په څير هم ښوول کيدى شي، خو مونږ يى دلته د ښوونى څخه تيرېږو او دايى د تعريف له مخى د اعتبار وړ قوانينو په څير راوړو.

يادونه : مونږ کړاى شو، چى دا د ګڼونو ډيري په لاندې ډول د ډيريو په توګه يو په بل کي خوندې وليکو:

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

دا په ترتيب د ورپسى ډيري اصلي برخډيري دي

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

۲ – ډیرېپوهینېزې ستڼکلیمې

۲ . ۱ . ډیرې

په شمیرپوهنه کې پل په پل موږ ددې، د ستونځو سره مل، تعریف شوې کلیمې سره مخامخ کیږو، کومه چې د یوه لغات « ټولګې » سره روښانه کیدی یا پوهیدل کیدی شي. د بیلګې په توګه د انسانانو د ټولګې څخه غږیږو، چې په یوه ټاکلې وخت کې په یوه کوټه کې موجود وي، یا هغه هیلې، چې په یوه ځانګړې وخت کې په یوه ځانګړې ځای کې په اوبو کې لامبې. هغه غرڅه، چې د هسکې مینې د سپینې مورګې په ځنګلونو کې لا پاتې دي او همدا ډول هغه میږې او ووزې، چې په ۱۹۹۹ میلادې کال کې د کوچیانو څخه د لوړې له امله مړې شوي دي. د داسې شیانو ټولګه «ډیرې» (Die Menge , set) بلل کیږي یا داسې ټولګې ډیرې نوموو.

۲ . ۱ . ۱ لنډ تعریف : ځموږ د خیال یا تصور د ټولو، په روښانه توګه، توپیرکیدونکو شیانو ټولګه «ډیرې» نوموو یا بولو.

.

شیان، چی له هغو ډیری جوړ شوی دی، د ډیري «توکي»
بلل کیږي. د دې لپاره، چی « x د ډیري M توکی دی»
لیکو: « $x \in M$ ». د دې وینا په څټ یا نفي
یا نیګیشن Negationد « $x \notin M$ » له لارې ورکول کیږي.
د « $x_1 \in M$ او .... او $x_n \in M$ » په ځای لیکو:

$$"x_1, x_2, ..., x_n \in M"$$

یو ځانګړی ډیری تشډیری دی، داسی کرکتریزه کیږي،
چی کوم توکی نه لري. دا تشډیری د سومبول یا نخښی Ø
سره نخښون کیږي یا په نخښه کیږي.
نور هغه ډیرې چی زیات مو مخ ته راځي یا زیات منځ ته
راځي، دا لاندې ډیري دي:

د ټولو طبیعی یا پیدایښتیزګڼونو ډیری د N سره په نخښه
کیږي، چی صفر ورسره مل دی.
د ټولو ټولګڼونو ډیری Z
د ټولو راشنلګڼونو ډیری Q
د ټولو ریيلګڼونو ډیری R
د ټولو کمپلکسګڼونو ډیری C
د ۳۰ پرویشونو ډیری، چی له ۸ توکو څخه جوړ ډیری دی.
یعنی {1,2,3,5, 6,10,15,30} ډیری.

۲ . ۱ . ۲ تعریف : یو ډیری M د ډیري N برخه ډیری بلل کیږي، که له $x \in M$ څخه تل لاس ته راشی $x \in N$.
په نخښونه یی : $M \subset N$. یا $N \supset M$

۲ . ۱ . ۳ تعریف : هغه ډیری، چی هیڅ توکی ونه لري، تشډیری بلل کیږي او داسی $\emptyset$ یي په نخښه کوو.

تشډیری $\emptyset$ د هرډیري برخډیری دی ، برسیره پردې هر ډیری د خپل ځان برخډیری دی. دا ډول ډیري نااصلي برخډیري بلل کیږي، هغه برخډیری اصلي برخډیری دی. یا اصلي برخډیری بلل کیږي، که دا برخډیری له دې دوه ډیریو یعنی له پخپله دې ورکړ شوي ډیرې او تشډیري څخه توپیر ولري. دې ته دې هم باید ګوته نیول شوي وي، چی کله کله برخډیریو ته «لاندې ډیري» هم ویل کیږي
دا نخښی $\subset$، $\subseteq$ د اینکلوزیون نخښو Inklusionszeichen په نامه بل کیږي.

۲ . ۱ . ۴ تعریف : که وي $M \subseteq N$ او $M \neq N$ نو M د N اصلي برخډیری بلل کیږي. ($N \neq M$)
په نخښونه یی : $M \subset N$

۲ . ۱ . ۵ تعریف: د يوه ډيرې S توکي کيدی شي پخپله ډيري وي. دلته نوS د ډيريسيستم په توګه په نخښنه کيدی شي يا د ډيري سيستم په څير ګڼل کيدی شي يا په بل عبارت: د يوه ډيري د توکو ډيري د هغه ډيري برخډيری دي، چی دا يو د ډيريسيستم جوړوي.

۲ . ۱ . ۶ تعریف: د يوه ناتش ډيري سيتسمS غوڅډيری (د سيستم هغه برخډيری، چی د سيستم د هر ډيري برخډ- يری وي) D د ټولو توکو هغه برخډيری دی، چی په همغه وخت يا يووخت کی د سيستم S د هر ډيري M توکی وي. يعنی لرو $x \in D$ همغه ارزښته يا برابرارزښته د دې سره دی $x \in M$ د ټولو ډيريو $M \in S$ لپاره .

په نخښونه: $D = \bigcap_{M \in S} M$ يا $D = \bigcap \{M \mid M \in S\}$

$$D = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$$

که S يوائي د پای ډيرو برخډيريو $M_1 , \dots , M_n$ څخه جوړ دی.

مساوات يا برابرون $M \cap N = \emptyset$ وايي، چی M او N ګډ توکی نه لري، يعني توکی پردي دي يا لنډ پردي يا ديسيونکت دي(Disjnukt) دي .

۲ . ۱ . ۷ تعریف: د یوه ناتش ډیریسیستم S ټولنه V د ټولو هغو توکو ډیری دی، چی کم له کمه د S ډیریسیستم یوه ډیري M پورې اړه ولري یعنی توکی وي.

په نخښونه : $V = \bigcup_{M \in S} M$ یا $V = \bigcup \{ M \mid M \in S \}$

$V = M_1 \cup .... \cup M_n$

که ډیریسیستم S د پای ډیرو برخډیریو $M_1 , M_2 , ... , M_n$ څخه منځ ته راغلی یا جوړ وي.

د غوڅډیري او ټولنډیري د تعریف په مرسته پسی ترلي لاندې اړیکي لاس ته راځي ، چی ښوونه یی ګرانو لوستونکو ته پریښوول کیږي.

۲ . ۱ . ۸ مرستندوي جمله:

(a) $M \cup (N \cap N) = (M \cup N) \cap (M \cup N)$

(b) $M \cap (N \cup N) = (M \cap N) \cup (M \cap N)$

(c) $M \cap N = M$

د $M \subset N$ سره په همغه مانا ده

(d) $M \cup N = M$

د $N \subset M$ سره په همغه مانا ده

پايڼيري كيدى شي، چى د هغو د غړو له لارې په نخښه شي.
ليكل كيږي

$$\{ x_1 , x_2, \dots , x_n \}$$

د همغه ډيري M لپاره، چى ټيك له دې وركړشوو توكو څخه جوړ وي. يوتوكيز ډيرى { x } د هغه د توكي x څخه بايد توپير شي:
د بيلگي په توگه { Ø } هغه ډيرى دى، چى د هغه يواځنى توكى تشڼيرى دى .

ديوه ډيري M د توكو گڼون يا تعداد د | M | سره په نخشه كيري. دا گڼ |M| د ډيري M زور يا توان بلل كيږي، دا په دې مانا چي د ډيري د توكو گڼون يا تقداد د ډيري زور دى. د بيلگي په توگه دى 1 = | { Ø } | او 0 = | Ø | .
د يوه ډيري بل ډول روښانونه يا شميرنه په دې كى نغښتى، چى ديوه وركړ شوي ډيري M ټول توكي وركړ شوي ، كوم توكى چى گڼ خويونه E ولري، و يوه نوي ډيري ته سره راټولگه كړې يا را يوځاي كړي. E(x) په دې مانا چى x خويونه E لري، نو دا ډيرى په { x ∈ X | E(x) } سره ښايو.
د بيلگي په توگه ډيرى {x ∈ Z | x² = 1} د -1 او 1 څخه جوړ شوى، د ټولو ټولگڼونو برخڼيري دى. د يوه ډيري دا

ډول جوړونی سره د انډولډيري X ورکونه مهمه ده، له کومی چی توکی رانیول کیږي، په غیر له دې کیدی شي، له تضاد یا مخامخوالی ډك یا په څټ ډيري رامنځ ته شي، دا چی انډولډيری په ټولیزه توګه په همغه اړیکو یواځنی ټاکلی دی، نو په دې حالت کی دې په اکسپلیځیت(Explizite لاتین : روښانه ، واضح) ورکونه تیریدنه وشي.

۲ . ۱ . ۹ تعریف: د دوه ډیریو M او N کمونډیری دی :

$$M \setminus N = \{ x \in M \mid x \in N \}$$

د غوځي ، ټولنی او کمون لپاره په پوره روښانه توګه لاندې یادوو:

کموتاتیو قانون Kommutativität

$$A \cap B = B \cap A \ , \quad A \cup B = B \cup A$$

اسوځیاتیو قانون Assotiativität

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

دیستریبوتیویتي قانون Distributivität :

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \ ,$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

ټوليز يا عمومي

$$\left(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}\right) \cap B = \bigcup_{\alpha}\left(A_{\alpha} \cap B\right)$$

او ورپسى

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C),$$
$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B), \qquad A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$$

ډيرې شميرپوهنيزې ښووني د پوره اندكشن په پرينخيپ ولاړې دي، كوم چې د طبيعي ګڼونو اكسيوماتيكي جوړخت دلايلو راوړنه كې يو غوره رول لوبوي.

۲ . ۱ . ۱۰ د پوره اندكشن ثبوت پرينخيپ:

A دې په طبيعي ګڼونو $n \in N$ يوه ويناو ي. $A(n)$ په دې مانا دى، چې A په n باوري كيږي.
د يوه كره ټاكلى $n_0 \in N$ څخه پيل باور لري:

الف : $A(n_0)$ د اينډكشن پيل:
ب ؛ د اينډكشن پاي : د ټولو $n \geq n_0$ لپاره له $A(n-1)$ څخه هم $A(n)$ لاس ته راځي
نو بيا A د ټولو طبيعي ګڼونو $n \geq n_0$ لپاره ريښتيا ده يا صحيح يا ټيك ده(دا ريښتيا مناسبه نومونه ده).

دې ته دې ګوته نيول شوي وي، چې خورا ساده دی، كه چيري د ايندكشن پاى په لاندې ډول لاربښوده كړو:

ب : له $A(i)$ څخه د ټولو i لپاره د $n_0 \leq i < n$ سره $A(n)$ هم لاس ته راځي.

شرایط (b) او ('b) برابرارزښته دي ، لکه چې وړیسی یا تړلي ليدل كيږي.

د انيدكشن ښوونه يا ثبوت بيلګې د لاندې جملو اوبيو يا حلونو ته مرسته كوي يا د لاندې جملې اُبيو په چوپړ كې دي.

۲ . ۱ . ۱۱ تعريف: M دې يو وركړشوى ډيرى وي. د M د ټولو برخډيريو ډيرى. چې په $P(M)$ سره يې په نخښه كوو يا ښايو، د M دپوتنځډيري Potenzmenge يا توانډيري په نامه ياديږي.

۲ . ۱ . ۱۲ جمله: M دې يو n– توكيز ډيرى وي. $P = P(M)$ دې د M د ټولو برخډيريو ډيرى وي. نو دا د M په توان ډيرى P له 2^n توكو څخه جوړ دی.

اوبی (حل): د ايندكشن پيل: $n = 0$

ګورو چې M كوم توكى نه لري. له دې امله M تشډيرى Ø دى. د $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$ له امله په P كې يو توكى $1 = 2^0$ موجود دى.

وي دې : $n \in N , n \geq 1$

د ايندكشن نيونه يا فرضيه: هر $(n - 1)$ – توكييز ډيرى دې ټيك 2^{n-1} توپيريدونكى برخډيري ولري.

د ايندكشن اوښى يا ثبوت : كه M يو ډيرى د n توكو سره وي، نو $P(M)$ ټيك له 2^n توكو جوړ دى.

د دې سره دې $M = \{a_1, a_1, ..., a_n\}$ وي.

نو بيا $P(M')$ د $M' = \{a_1 , a_2, ..., a_{n-1}\}$ لپاره د ايندكشن د نيونى يا فرضيي سره ټيك 2^{n-1} توكي لري،

كه $A \in P(M)$ وي، نو بيا يا $a_n \in A$ دى او يا $a_n \notin A$. په دوم حالت كي A په $P(M')$ پورې اړه لري، او په لومړي حالت كي $A' = A \setminus \{a\} \in P(M')$ نو $P(M)$ ټيك

$$2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^{n-1} (1 + 1) = 2^n$$

توكي لري. د پوره ايندكشن د پرينځيپ له مخى دلته وښوول شو، چې د هر n – توكيز ډيري M لپاره پوتنځ – يا تواندډيرى $P(M)$ ټيك 2^n توكى لري. *

یو د ثبوت له مرستندوي موادو څخه د ناپای ډیري زدکړې لپاره د څورن Zorn جملګي ده. S دې یو ناتش ډیریسیستم وي. یو ناتش د S برخډیری K یو ځنځیر بلل کیږي، که له $M_1, M_2 \in K$ څخه تل $M_1 \subseteq M_2$ لاس ته راشي او یا $M_2 \supseteq M_1$ لاس ته راشي.

۲ . ۱ . ۱۳ تعریف :یو ډیري $M \in S$ د S یو ماکزیمال یا لوي توکی بلل کیري، که له $N \in S$ او $M \subseteq N$ څخه تل لاس ته راشي ، چی $M = N$. نو د څورن جملګی په لاندې ډول ده: (ماکزیمال یا ماکسیمال = Maximal)

۲ . ۱ . ۱۳ د څورن جملګیLemma vo n Zorn:

که د ناتش ډیریسیستم S د هر ځنځیر K لپاره ټولنډیري { K | K∈K } هم یو د S ډیریسیستم توکی وي، نو بیا په کي یو ماکزیمال maximales Element توکی موجود دی.

ددې جملګی د ثبوت څخه دلته تیریږو.

وي دې N د یوه نیم منظم ډیرې M لاندې ډیری یا برخه ډیری. هر (ضرور نه دی، چی په N کی ځای وي یا خوندې وي) a له M څخه، کوم چی د ټولو $x \in N$ لپاره شرط $a \geq x$

پوره کړي د لاندې ډيري پورته بند بلل کيږي يانې ډيري يې
د لته رابند دې. دې ته دوگونې کليمه لاندې بند دې.
په ورکړ شوې نيممنظم ډيري M سره د ټولو څنځيرونو ډيري د
ډيري خونديونې په موخه يا هدف ، هم نيمه منظم دې. دا ټول د
اخرني ډيري ماکسيمال توکې ، د خپل طبيعت له مخې د M
ماکسيمال څنځير بلل کيږي.
لاندې جملې يو بل ته ورته دې يانې د يوې څخه بله لاس ته
راځي او په څټ.

۲ . ۱ . ۱۴ د څرميلو جمله Zermelo: هر ډيرې کيدى
شي منظم شي

۲ . ۱ . ۱۵ د هاوزدورف جمله Hausdorff:هره د يوه
نيمه منظم ډيري څنځير په يوه ماکسيمال څنځير کې خوندې ده.

۲ . ۱ . ۱۶ د کوراتوفسکي –څورن
جمله Kuratowski-Zorn :
که د يوه نيممنظم ډيري M هر څنځير يو پورته بند ولري، نو
د M په هر توکې پسې يو په نامه ماکسيمال توگې راځي.
ددې درې جملو له ثبوت څخه دلته تيريږو.

اوس دې X او Y دوه ناتش ډیري وي. د یوې د X په Y کی څیرونی (په نخښونه $f : X \to Y$) لاندې یو تنظیم پوهیږو ، په کوم کی چی د $x \in X$ هر توکی یواځنی یوه د $y \in Y$ توکی باندې د څیرې په توګه تنظیم شي یا ترتیب شي، د x څیره y په څیرونه f د f(x) سره او یا هم ساده د fx سره په نخښنه کوو. ډیری X د څیرونی f تعریفډیری بلل کیږي او ډیری Y د هغی موخیډیری یا څیرډیری بلل کیږي.

که f د x څیرونه یا څیره کونه وي په Y کی او M یو د X برخډیری وي، نو دا د ټولو $x \in M$ توکو څیرې ډیری او په ورته توګه د ډیرې M څیره بلل کیږي او داسې په نخښنه کوو f(M) یا په ساده توګه fM . پس باور لري:

$$fX = \{ fx \mid x \in M \},$$

او fM د Y یو برخډیری دی. د تشډیري څیره بیرته تش ډیری دی. د تعریف ډیري څیره fX د f څیره هم بلل کیږي او د Im f سره په نخښنه کیږي.

۱ . ۱ . ۱۰ **تعریف:** که $\text{Im } f = Y$ باور ولري ، د څیرونی $f : X \to Y$ لپاره، نو f یوه سوریکتیوه څیرونه Surjektion surjektive Abbildung بلل یږي، یو سوریکشن یا یوه د X څیرونه په Y باندې. په ځې دې N یو د S

برخډیری وي. نو بیا د ټولو X د توکو ډیری، چی د هغو
ڎیره د N یو توکی وي، د N له ڎیرې پخوا ڎیرونه، په
ڎیرونه f کی، بلل کیږي او د $f^{-1}(N)$ سره په نخښه
کیږي. باور لري

$$f^{-1}(N) = \{ x \in X \mid fx \in N \}$$

او $f^{-1}(N)$ یو د X برخډیری دی.

که $N \neq \emptyset$ هم باور ولري، کیدی شي $f^{-1}(N)$ تشډیری
وي، یعنی هلته که $N \cap \mathrm{Im}\, f = \emptyset$ باور ولري.

۲ . ۱ . ۱۷ تعریف : یوه ڎیرونه $f : X \longrightarrow Y$ د
خویونو سره،
چی له $x_2 \neq x_1$ تل $fx_2 \neq fx_1$ لاس ته ریشي، اینیکتیو
ڎیره کونه injektive Abbildung بلل کیږي یا اینیکشن
Injektion. که په همدې وخت کی f حتی یو اینیکتیو او
سوریکتیو وي، نو f بییکتیو ڎیره کوونه bijektive
Abbildung بلل کیږي یا بیکشن Bijektion بلل کیږي.

۲ . ۱ . ۱۸ تعریف : $f : X \to Y$ دې یوه بییکتیوه
ڎیره کونه وي. په هر $y \in Y$ د ڎیرې په توګه یو یواځنی

ټاکلی توکی $x \in X$ د $y = f(x)$ سره د ځيرې په توګه تنظيم کړي، نو دلته د Y يو بييکشن په X تعريفوي.
دا د f په څېر ځيرونه بلل کيږي او يا دا f ته راګرځيدونکی ځيره کوونکي ده. او د $f^{-1} : Y \rightarrow X$ سره په نخښنه کيږي

۱ . ۱ . ۱۹ **تعريف:** که دوه ځيرونی $f : X \rightarrow Y$ او $g : Y \rightarrow Z$ يو په بل پسی رامنځ ته کړی شي او په ټوليزه توګه يوه د $g \circ f$ سره په نخښنه شوې ځيره کونه د X په Z کی ترې لاس ته راځي، کوم چی د f او g ځل يا ضرب ځيرونه بلل کيږي زيات وخت د ځنځيرې او يا تړلی بلواك يا ځيره کوني په نامه هم ياديږي. دا په لاندې ډول ورکړ شوی دی.

د ټولو $x \in X$ د پاره $(g \circ f) = g(fx) = g(f(x))$
کيدی شي چی تعريفډيری او ځيره ډيری يو بل باندې پريوځي.
دلته بيا له يوې ځيرونی f غبرږو، چی X په خپل ځان ځيره کوي.

۲ . ۱ . ۲۰ **تعريف:** که دډيري X هر توکی په خپل ځان بيرته ځيره شي، نو يو د X بيکشن په خپل ځان لاس ته ترې راځي،

چې د X کتمټ څیرونه Identität یا identische Abbildung یي بولو او په لاندي ډول يې ښايو id_x او یا په ساده توګه id .

۲ . ۱ . ۲۱ یادونه: د هر $x \in X$ د پاره باور لري $id_x = x$. که f یو د X بیکشن په Y وي، نود دې په څټ څیره کونه f^{-1} هم موجود ده او لاس ته ترې راځي

$$f^{-1} \circ f = id_x , \quad f \circ f^{-1} = id_y$$

۲ . ۲ ځلېدېری یا ضربېدېری او اړیکی يې

په دې برخه کې کارتیزي ځل د ناتشو ډیریو او همداسې د اکویوالینځ اړیکو یا ورتوالی اړیکو Äquivalenzrelation کلیمه څېړو.

۲ . ۲ . ۱ تعریف: د دوه ډیریو A او B کارتیزي ځل $A \times B$ د تنظیمشوو جوړو (a , b) ټولګه ده، د $a \in A$ او $b \in B$ سره. دلته $(a , b) = (a', b')$ ټیك هلته باور لري، چې $a = a'$ او $b = b'$ وي.

.

۲ . ۲ . ۲ يادونه: کارتيزې ځل په ټوليزه توګه کموتاتيو نه دی ، دا په دې مانا چي $A \times B \neq B \times A$ که $A \neq B$ وي. په پام کي دې دا اثتثنا وي، چی د هر ناتشډيري A او تشډيري $\emptyset$ لپاره باور لري

$$A \times \emptyset = \emptyset \times A$$

په ورته توګه د دوه ډيريو کارتيزې ځل په څير د پاي ډيرو ډيريو دپاره هم کارتيزې ځل تعريفيږي.

۲ . ۲ . ۳ تعريف: کارتيزې ځل $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ د پاي ډيرو ډيريو A_i د $i = 1, \ldots, n$ لپاره، د ټولو منظمو يا ترتيبشوو n – ګونو $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ د $a_i \in A, i = 1, 2, \ldots, n$ سره. دلته

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1', a_2', \ldots, a_n')$$

ټيك هلته باور لري، که $a_i = a_i'$ د ټول $i = 1, 2, \ldots, n$ لپاره وي.

که $A = A_i$ وي، د ټولو $i = 1, 2, \ldots, n$ لپاره، نو $A^n = \bigtimes_{i=1}^{n} A_i$ د A n –ايزی توان يا پوتنځ بلل کيږي. (n-ام توان)

ډيری $\{(a, \ldots, a) \in A^n \mid a \in A\}$ د A^n نيمی يا قطر دی.

بینار اړیکی binäre Relationen

۲ . ۲ . ۴ تعریف : یود $A \times A$ برخدېری R د ډيري A دوه ځایزه اړیکي بلل کیږي. وایو : د A دوه توکی a او b په اړیکه R کی یو له بل سره پراته دي، په نخښونه $a \sim b$, هلته او هلته یا په بل عبارت ټيك هلته، که وي

$$(a, b) \in R \qquad \text{او} \qquad a R b$$

د بینار اړیکو یا دوه ځایزو اړیکو R کومپلیمنت یا پوره کید- ونکی یو دوه ځایزه اړیکي $\overline{R}$ دی چي په لاندې توګه تعریف دي $\overline{R} = (M \times M) \setminus R$. په نورو ویناو سره $a \overline{R} b$ ټيك هلته باور لري، که $(a,b) \notin R$.

د بینار اړیکو د ځل RS لاندې پوهیږو، چی $a(RS)b$ ټيك اوټيك هلته باور لري، که په M کی یو توکی c موجود وي ، د کوم لپاره چی $a R c$ او cSb باور لري.

د بینار اړیکو ځل اسوشیاتیو دی یعنی

$$(RS)T = R(ST)$$

د بینار اړیکو څل په هیڅ توګه کوموتاتیو نه دی ، کله کله اړیکی R او S یو له بل سره بدلیدونکی وي ، دا په دې مانا چې

$$RS = SR$$

یوون اړیکی E په لاندې ډول تعریف دي: aEb ټیك هلته باور لري که وي، a = b . یا په بل ډول اړیکی E د ټولو هغو توکو جوړو (a,a) د $a \in M$ سره ډیری دی. دلته په روښانه توګه باوور لري: $E = E^{-1}$ او دیوه خوښی اړیکیR لپاره باور لري :

$$RE = ER = R$$

موږ تش اړیکو 0 ته هم ګوته نیسو، چې د $M \times M$ تشډیري په څیر تعریف دی. د هر بیناراړیکي R لپاره په ډیري M کی باور لري:

$$0 \subseteq R \quad \text{او} \quad 0R = R0 = 0$$

موږ کله کله د بینارو اړیکو سره مخامخ کیږو، چې د لاندې خویونو څخه ځنی په کی باور لري

رفلکسیویتي: aRa د ټولو $a \in M$ لپاره دا په دې مانا چې $E \subseteq R$

ترانزیتیویتي: له aRb او bRc څخه لاس ته راځي، aRc دا په دې مانا چې $RR \subseteq R$

سیومتري: له aRb څخه لاس ته راځي bRa دا په دې

مانا چي $R^{-1} = R$

انتيسيومتري: له $a R b$ او $b R a$ څخه لاس ته راځي
$a = b$ دا په دې مانا چی $R \cap R^{-1} \subseteq E$

۲ . ۲ . ۵ جمله : که کوم يو بينار اړيکي له دې پورته خويونو څخه کوم يو ولري يا ټول ولري، نو د دې اړيکو په څېر اړيکي R^{-1} هم دا خويونه لري.

اوبى (حل):
په عمل کی له $E \subseteq R$ څخه لاس ته راځی

$$E = E^{-1} \subseteq R^{-1}$$

که $RR \subseteq R$ وي، نو باور لري

$$R^{-1} R^{-1} = (RR)^{-1} \subseteq R^{-1}$$

که $R^{-1} = R$ وي ، نو باور لري

$$(R^{-1})^{-1} = R = R^{-1}$$

له $R \cap R^{-1} \subseteq E$ څخه لاس ت هراځي

$$R^{-1} \cap (R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cap R \subseteq E$$

ايکويوالنځ اړيکی :د بينار اړيکو څخه يی خورا مهمي اړيکی ايکويوالنځ اړيکي دي، چی په لاندې کی يي تعريفوو

۲ . ۲ . ۶ تعريف : يو ناتش دوه ځايزه اړيکی ~ په ډيري A کی ورته اړيکي يا اکويوالنځ اړيکی بلل کيږي، که د ټولو a , b , c ∈ A لپاره لاندې اړيکی باور ولري.

الف) a ~ a (رفلکسيو reflexiv)

ب) a ~ b <=> b~a (سيومتري symetrisch)

پ) a ~ b او b ~ c څخه (<=>) a ~ c لاس ته راځي . (ترانزيتيو transitiv)

۲ . ۲ . ۷ بيلگه:

الف) مساوات يا برابرون « = » د هر ډيري A لپاره يو ورته والی اړيکي Äquivalenzrelation دي.

ب) د a , b ∈ Z لپاره a ~ b ټيك هلته باور لري، که 2 د گڼ a - b پرويشونی وي.

ايکويوالنځ اړيکی په کلکه د دې سره تړاو لري، چی يو ډيری

یو بل سره په پردیو ټولګي ډیریو ویشي. دوه ډیري یو بل سره پردي بلل کیږي، که دوي ګډ کوم توکی ونه لري یانی غوڅي یي تشډیری وي.

غواړم، چی دا ټولګیویشنه داسی لږغوندې روښانه وځیړم، که څه هم زیاتو لوستنکو ته به ستړیکیدونکي وي، مګر لږ پوهوړ به شي. که چیرې طبیعي ګڼونه په 5 وویشو نو دلته پنځه ټولګیویشنی لاس ته راځي، چی ویشپردي دي: هغه ټولګی، چی 1 ولري او ټول 1 + n5 , ... , 1 + 5, 1 + 25 ، دوم هغه ټولګی، چی ۲ ولري او ورسره تر 2 + n5 دریم: هغه ټولګی، چی 3 ولري او ټول ورسره 3 + n5 . څلورم هغه ټولګی، چی ۴ ولري او ټول ورسره 4 + n5 . پنځم هغه ټولګی، چی 5 او ټول ورسره 5 +n 5 . چی دا په 0 سره هم ښوولی شو، چی نور ورسره ټول 0 + n5 ولري. دا ډول شمرنی بیا د ګڼونتیوري دنده ده، چی په همغه ډول کتابونو کي لوستل کیږي. هلته د کونګرو- اینځ اړیکو لاندې لوستل کیږي، چی زه یي دلته په لیك دود هم نورې خبرې نه کوم. په دې کی دې ګران لوستونکی یو پوره پام وځغلوي او ټولګی ویشنه او ایکوالنځ اړیکي دې پخپله نوري هم روښانه کړي، چی.

د ټولګيويشنه په همدې وخت کې ايکويوالنځ اړيکی هم جوړوي،

دا په دې مانا چی د ايکويوالنځ اړيکو او ټولګی ويشنی ترمنځ راګرځيدونکی يواځنی اړيکي موجود دي. دا په دې مانا چی د اکويوالنځ اړيکو سره يو يواځنی تنظيم راکړ شوی او دا بيا په څټ کيدونکی هم دی.

که R په A کی يو ايکويوالنځ اړيکه وي ، نو A / R د فاکتورډيري په نامه بلل کيږي نسبت و ايکويوالنځ اړيکوR ته. هغه څيرونه چی د A او A / R ترمنځ پرته ده د طبيعي څيرونی په نامه بلل کيږي.

لنډ: ويلی شو، چی ټولګي ويشنه او ايکويوالنځ اړيکی يو له بل څخه لاس ته راځی. موږ دا شمير پوهنيز په لاندې توګه تعريفوو:

۲ . ۲ . ۸ تعريف: که ~ د ډيري A ورته والی اړيکي وي، نو د توکی $a \in A$ ورته والی ټولګی يانی کلاسی يا صنف [a] په لاندې توګه ورکړ شوی دی.

$$[a]= \{ b \in A \mid a \sim b \}$$

د ورته والی ټولګي [a] هر توکی b د ټولګي [a] نماينده

.

بلل کیږي.

۲ . ۲ . ۱۱ مرستندوي جمله: که ~ د ډیري A ورته-والی اړیکي وي، نو د توکو $a, b \in A$ لپاره لاندې وینا وې جوړه برابرارزښته یا جوړه مساوي ارزښته دي

(a) $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

(b) $a \sim b$

(c) $[a] = [b]$

اوبی (حل): که $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ وي، نو یو $c \in A$ موجود دی د $a \sim c$ او $b \sim c$ سره. د ~ سیومتري او ترانز-یتیویتي له امله لاس ته راځي $a \sim b$. له دې امله (b) د (a) یوه لاس ته راوړنه ده یا تعقیب دی. اوس باور لري $a \sim b$. له دې امله نو $x \in [a]$ د $a \sim x$ سره برابرارز-ښته دی، او همداسی د $x \sim b$ سره. نو $[a] = [b]$ دی، او (c) له (b) څخه لاس ته راځي.

په پوره باور (a) له (c) څخه لاس ته راځي.

زیات موخور یا هدفمند دی، که یو ډیریسیستم S د یوه په نامه ایندکشنډیري یا پیژندډیري A په مرسته په نخښه کړو یا روښانه کړو. د لته A یو (پاي یا ناپای) ناتش

ډیری دی، او هر ایندکس یا پیژندنخښی $\alpha \in A$ یواځنی یو ډیری A له S څخه داسی ترتیب شوی دی، چی باور لري: $S = \{A_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

۲ . ۲ . ۱۲ تعریف : د یوه ډیري $A \neq \emptyset$ د برخډیریو A یو سیستم $\{A_\alpha \mid \alpha \in A\}$ د د ډیري A یوه ټوټونه (تجزیه) بلل کیږي، که باور ولري:

(a) $A_\alpha \neq \emptyset$ د ټولو $\alpha \in A$ د پاره

(b) $A = \bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha$

(c) $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$

د ټولو $\alpha, \beta \in A$ لپاره د $\alpha \neq \beta$ سره

۲ . ۲ . ۱۳ جمله : R دې په ډیري A کی یو ورته اړیکي وي. نو د ورته والي ټولګي نسبت و R ته یو د A ټوټونی دی. په څټ یو په خوښه د A ټوټونه $\{A_\alpha \mid \alpha \in A\}$ یواځنی یو ورته والی اړیکي په A ټاکي، د کوم لپاره چی د ټوټونی ډیری A ټیك ورته والي ټولګي دي.

اوبی (حل یا ثبوت): سملاسي د پورته مرستندوي جملی ۲ . ۲ . ۸ او تعریف ۲ . ۲ . ۹ څخه لاس ته راځي.

۲ . ۳ نیمنظم یا نیم ترتیب

د بینار اړیکو یو بل غوره یا مهم حالت نیمنظم اړیکی جوړوي. دا هغه اړیکی دي، چی رفلکسیو، ترانزیتیو او انتیسیومتري دي. هغه ډیری، چی نیمنظم په کی تعریف وي ، نیممنظم یا نیم په ترتیب بلل کیږي. د نیمنظم لپاره دا سومبول $\leq$ کارول کیږي او د ډیري M د توکو a , b لپاره باور لري $a \leq b$ او داسی لوستل کیږي، چی a له b کوچنی او یا له b سره مساوي ده. یا a په b کی خوندي ده یا a له b څخه مخ ته ځی. که $a \leq b$ وي او $A \models b$ وي، نو لیکو $a < b$ او وایو چي a له b څخه کوچنی ده، په دې حالت کی a په b کی اصلي خوندي ده. په یوه ډیري Mکی دی نیمنظم تعریف وي. د دې ډیر دوه توکي $a , b \in M$ یو له بل سره انډولوړ دي، که چیرې وي $a \leq b$ او یا $b \geq a$. که له $b \leq a$ څخه $a = b$ لاس ته راشی نو د ساده نیمنظم څخه غږیږو. یو ډیری، په کوم چی دوه توکی تل یو له بل سره انډولوړ وي، نو دا ډیری لاینی نظم شوی یا منظم یا ترتیب شوی او یا ځنځیر یعنی یو له بل سره تړلی بلل کیږي.

۲ . ۳ . ۱ تعریف: د دوه نیمنظم شوي ډیریو M او 'M

ترمنځ يواځنی او په څټ ځيره کونه f موجود ده يعني

$af = a' \quad , a \in M , a' \in M'$

که له $a, b, \in M$ $a \le b$ تل $af \le bf$ لاس ته را شي او په څټ، نو f د M او 'M ترمنځ يو ايزومورفيزم ispmorphism بلل کيږي، چی دا به وروسته هم بيا پوره وڅيړل شي او ډيري 'M , M پخپله ايزومورف نيممنظم ډيري بلل کيږي.

که يوه نيممنظم ډيری M په يوه نيممنظم ډيري N کی ايزومورف خونديږ وي، نو دې ته ايزومورف ځايونه يا خونديونه وايو، که د M يوه ايزومورفه ځيره کونه په 'N د ډيري N برخه ډيري باندې موجود وي او ډيری 'N پخلپه نيممنظم ډيری وي او که 'N په هغه نظم ترتيب وي ، چی له N ورته راپاتی وي.

۲ . ۳ . ۲ جمله:

هر نيمنظم ډيری M د ډيري N ، چی نسبت وخونديونی ته نيممنظم دی، ټولو لانديډيريو ډيري 'N سره ايزومورف دی.

په ځانګړي توګه کيدی شي ، چی د ډيري N لپاره پخپله ډيری M ونيول شي يا راوړل شي.

د دې جملی د خوونی څخه تيرېږو. په کوروش کی کتل کيدی شي.

یوه نیمنظم ته په ځټ اړیکی هم نیمنظمی دي.
د ټولو $M' \ni a'$, $M \ni a$, $af = a'$ لپاره، د $M \ni a, b$
سره $a \leq b$ ټیک او ټیک هلته یا هلته او هلته باور لري،
که وي: $af \leq bf$.

۲ . ۴ مینیمال شرطونه

یو د نیممنظم ډیري M توکی a د ډیري مینیمالتوکی بلل کیږي، که په M کی داسی یو توکي x موجود نه وي، د کوم لپاره، چی شرط $x < a$ باور ولري. دا روښانه ده، چی M ډیر مختلف مینیمال توکي لرودی شي او یا هیڅ مینیمال توکي .
د بیلګي په توګه ډیری N' د ټولو د ډیري N لاندېډیریو یا برخه ډیریو ډیری یواځنی یو مینیمال توکی لري، داسی په نامه تشډیری . په یوه ډیري کی هر لاندې ډیری یا برخډیری مینیمال توکی دی ، که دا ډیری د یوه توکی جوړ وي. دا کلیمه د یوه ځانګړي نیمتنظیم شوي ډیري ټولګیو لپاره کارول کیږي. د دې ټولګی نیمتنظیم شوي ډیري لاندې یو بل سره ورته یا ایکویوالنت شرطونه پوره کوي:

۲ . ۴ . ۱ جمله(مینیمال شرطونه) : هر د یوه نیمتنظیم شوي ډیري M ناتش لاندې ډیری N یو مینیمال توکی (په N کی) لري.

۲ . ۴ . ۲ (د لویدونکی ځنځیر پریکیدنی شرطونه): د نیمتنظیم شوي ډیري M په را غونډه موخه هر لویدونکی ځنځیر

$$a_1 > a_2 > a_3 > ... > a_n > ....$$

د پایډیرو غړو وروسته پرې کیږي یا ماتیږي یا غوڅیږي. په نورو کلیمو سره ، د توکو د هر لویدونکی ځنځیر

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \geq a_n \geq \quad ....$$

سره یو ایندکس یا پیژند نخښه n شته، له کومی چی د دې ډیري ټول توکی برابر دي دا په دې مانا چی د n وروسته $a_n = a_{n+1} = ...$ باور لري

۲ . ۴ . ۳ جمله (ایندکشن شرطونه): د یوې نیمتنظیم شوي ډیري M ټول توکی څه روښانه خویونه E لري. که دا خویونه په ټولو مینمال توکو (که داسی یو توکی موجود وي) موجود وي او که د دې موجودوالی، د ټولو توکو لپاره، چی له توکي a په کره توګه مخ ته ځي، پخپله په دې خویونو a

رابندیدی شي یاني دا خویونه ولري.

د دې جملو، چې یو بل ته ورته دي، د ښوونې یا اوبیونې څخه تیرېږو.

ویناوې چې د ټاکن اکسیوم سره همغه ارزښته دي:

ډیری N دې د یوه ډیري M لاندې ډیری وي. هر (ضرور نه دی چې په N کې خوندي وي) د M د توکی a د کوم لپاره چې شرط $a \geq x$ پوره وي د ټولو $x \in N$ لپاره، د لاندې ډیري پورته بند بلل کیږي یانی دا ډیری په دې توکی سره پورته لور ته بند دی. دا لاندې بند ته یوه دویزه کلیمه. په یوه ورکړ شوي نیمنظم ډیري M کې هره د ټولو ځنځیرونو ډیری د ډیري پوهنی په بنسټ نیمتنظیم ده. د دې ډیري ټول ماکسیمال توکی په طبیعي توګه دM ماکسیمال ځنځیر جوړوي.

یادونه : د دې پورته جملو ښوونه او زیات ورننوتنه په کروش کې کتل کیدی شي. موږ یې نوره رالنډوو.

۳ . الجبري جوړښتونه

د الجبر په کتابونو کی ډیر وخت دا دلته څیړل شوي موضوعات له توپیریدونکو یا له بیلو بیلو لارو څخه څیړل کیږي، څنی له عمومي الجبر څخه پیل کوي n–ځایزې عملیې، نښلونی یا کارونی تعریفوي او له دې څخه بیا ګروپ die Gruppe ، کړۍ Ring ، تن یا بدن Körper (engl. Field او په همدې ډول تړونونو یا تړنو Verbände او بول الجبر boolische Algebra ته راځی. زه دا لار غوره ګنم، چی لمړی له موړ ورسره بلدو کارونو یا عملیو څخه پیل وکړم او له دې لارې بیا الجبر ته راشم، او بیا په لنډ ډول د الجبر له لارې دا موړ ورسره بلدې کلیمي لنډې تعریف کړم.

د الجبر د مختلفو ځانګو لپاره بنستېزه کلیمه، چی ډیره تر څیړنی لاندې نیول شوې ده هغه د الجبري اپریشن یا الجبري عملیې او یا همدا ډول د الجبري کارونی، الجبري نښلوني یا الجبري ګنډني کلیمه ده.

موړ. ځانونه په يوه دوئيزې کارونی په زياتون يا ځل رابندوو يا محدودوو. دا دوئيزې کارونی يا عمليې، په لرې موخه، هغه عملي دي، چی د يوه ډيري G ټاکلي منظم د توکو جوړه (a,b) د دې ډيري په يوه بل توکی c تنظيم يا څيره کړي(لکه د G د ټاکلو غړو مربع، يعني دا د لاندې خويونو سره يوه څيرونه ده:

$$G\times G \longrightarrow G$$

دا په دې مانا چی د ټولو $(a,b) \in G\times G$ لپاره يو c د G څخه، يعني $c \in G$ موجود ده، د کومو لپاره چی باور لري که دا نښلونه ځل وي

$$a \,.\, b \longrightarrow c$$

په دې ټوليزه توګه په يوه ډيري کی د بينار يا دوه-ځائيز عمليې کليمی تعريف، په يوه ډيري کی د يوه ترنار ريليشن ternäre Relation يا درېځايزو اړيکو سره په همغه يا مساوي مانا دی.

يادونه: اپريشن die Operation، عمليه ، کارونه او يا نښلونه، ګنډنه، او همدارنګه په بلواکو کی کمپوز-يشن die Komposition يا څنګ په څنګ ايښوونه يا بهتره ځنځيرونه تل همغه مانا لري، چی ما کله کله

تړنه هم کارولی ده. د ډیرو نومونو کارونه، کوم چې همغه مانا ولري، تاوان نه لري. د شمیرپوهني ژبه هم باید پوره پراخه وي او په دې باور لرو چې کومه اشتباه په کې نه رامنځ ته کیږي.

موږ دلته د نمونې په څیر یواځې یویزې کارونې یا عملیې په ګوته کوو. او ور پسې بیا نور سملاسي خپل اصلي موخه تر مخه نیسو. دا یویزې عملیې هغه عملي دې، چې د کارولو سره یې د ډیري توکي تغیر نه خوري، لکه د صفر سره طبیعی ګڼونو N_0 توکو سره، په زیاتون کې چې هر توکي ته د صفر توکی ورزیاتونه پخپله همغه توکی دی،

د ټولو $a \in N_0$ لپاره $a + 0 = a$

او یا په ځل کې ، چې د طبیعي ګڼډیري N هر توکي سره 1 ځل شي، یعني

د ټولو $a \in N$ لپاره $a . 1 = a$

۳ . ۱ گروپ Gruppe:

که له یوې خوا د ټولګټونو، ریشنلګټونو یا رییلګټونو زیاتون په پام کې ونیسو او له بلې خوا ریشنل یارییلګټونو د صفر توپیرې یا د صفر سره نامساوي توکو ځل په پام کې ونیسو، نو دا میندلی شو، چې دواړه نښلونعملیي یا نښلو- نکاروني د همغه یو بل سره په یوغږ شمیرقوانینو لاندې دي. د بیلګي په توګه باور لري:

$(a+b)+c=a+(b+c)$ او $(a.b).c=a.(b.c)$

برسیره پر دې راویستلي یا استثنایي ګټونه موجود دي، دا په نامه 0 همداسی 1 ، کوم چې دې دوه ترنو ته ځانونه ناپیلی یا بي تاثیره نیسي. یعني:

$0+a=a$ او $1.a=a$

بالاخره باور لري

$$(-a) + a = 0 \quad \text{او} \quad (1/a).a = 1$$

دا په دې مانا، چې هر ګڼ a ته یو ګڼ á موجود دی (دا په نامه a- همداسی 1 / a)، چې د هغو زیاتون یا همداسی د هغو ځل یا ضرب د همغی یعنی زیاتون همداسی ځل نښلونی یا نښلونعملیي له لارې ناپیلی یا بی تاثیره توکی ورکوي.

دا چې دا قاعدې ګڼونشمیرنه په پراخه پیمانه په واك کی لري او په ډیرو نورو حالتونو کی هم رامنځ ته کیږي، دا راته نزدې ده، چې دا د ځانګړي طبیعیت، دشمیرنی او د همغو تړنعملیو څخه خپلواك وڅیړو. په دې ذهني راوړون دود سره مو شمیرقاعدې د هر څه له مخه مخ ته پرتي دي. نه هغه څه، د کومو سره چې شمیرنه کیږي غوره دي، بلکه دا غوره دې، چې څنګه شمیرنه کیږي. په یواځني ډول د مخه نیول کیږي، چې د یوه ورکړ شوي ډیري غړو لپاره داسی یوه نښلونه یا تړنه یا عملیه تعریف ده، دکومی له مخی، چې هره منظمه جوړه (a,b) د هغه ډیري د توکو بیرته د هغه ډیري توکی باندې تنظیم شي یا څیره شي او دې پورته

ویلشوو قوانینو لاندې پرتی دي یا په بل عبارت دا پورته قوانین په کی باور لري.
دا نښلونه د یوه ناپیلی سومبول ° سره ښایو.

یادونه : دا سومبول له خپل ځاي جګ لیکل شوی دی، خو زما بله چاره نه وه. د دوه ګڼونو نښلونو ټیك منځ کی که ولیکل شی ښه به وي.

۳ . ۱ . ۱ تعریف : یو ګروپ دیوه ډیري G او یوې ترني یا عملیې ° څخه جوړ دی، دکومی نښلونی سره چی د دې ډیري G د توکو هره منظمه جوړه (a,b) یواځنی یو د $a^\circ b$ سره په نخښه شوی د G توکی باندې داسی تنظیم شي، چی دا لاندې اکسیومونه پوره کړي:

اکسیوم ۱ – اسو ځیاتیو قانوباور لري

د ټولو $a,b,c \in G$ لپاره $(a^\circ b)^\circ c = a^\circ (b^\circ c)$
اکسیوم ۲ – یو ناپییلی توکي $e \in G$ شته، د ° تړاو سره ، د کوم لپاره چی باور لري

$$a^\circ e = e^\circ a = a$$

اکسیوم ۳ – د هر توکی a لپاره یو په څټ توکی á شته،
د کوم لپاره چي لرو:

$$a \circ á = á \circ a = e$$

د G داسی یو توکی ناپیلی توکی بلل کیږي

یو گروپ کموتاتیو یا ابلي گروپ abelsche Gruppe بلل کیږي، که پر دې پورته اکسیومونو برسیره، دا لاندې اکسیوم ۴ هم پوره کړي:

اکسیوم ۴ – کوموتاتیو قانون:

د ټولو $a, b \in G$ لپاره $a \circ b = b \circ a$

که گروپ G پای ډیر توکی ولري ، نو د G د توکو گڼون یا تعداد |G| د G نظم بلل کیږي.

د گروپ ټاکنتهوټو پورې د ډیري G ترخنګ د گروپتړنه ° داسی په نامه اپریشن، نښلونه یا کارونه یا عملیه هم اړه لري یا تعلق لري.
یو گروپ نو په دې توگه د یوې جوړې (G , °) سره په نخښه گول گیږي. دا چی گروپتړنه ډیر واره په دې اړوند

کره ټاکلی ده، نو په داسی حالتونوکی ددې جوړې په ځای یواځی G لیکل کیږي. گروپټرنه تر یوې اندازې پورې د گروپځل یا گروپضرب سره هم نومول کیږي، نو په دې توگه دا توکی $a^\circ b$ د توکو a او b د ځل په نامه هم بلل کیږي. په یوه نااَبل - یا ناکموتاتیوگروپ کی دې د توکو ترتیب یا لړپیپرلپسی ته هم پام وي، ځکه چی په یوه نااَبل گروپ کی په ټولیزه توگه $a^\circ b$ له $b^\circ a$ سره توپیر لري .

اکسیوم۱ را په گوته کوي، چی په ډیرواره ځلولو کی په نوکانو کی بندونه یا راگیرونه پورې اړ تیا نه څرگندیږي. له دې امله کیدی شی ، چی له نوکانو اینبوولو څخه بیخی تیریدنه وشي او د بیلگي په توگه د $a^\circ (b^\circ c)$ لپاره په ساده توگه لیکو $a^\circ b^\circ c$

۳ . ۱ . ۲ بیلگی :

اول - د ټولو ټولگڼونوډیری Z د ورسره بلد زیاتون سره، چی د کروپټرنی په څیر یی نیسو، یو ابلگروپ $(Z ;+)$ جوړوي. دلته بیا له زیاتونکروپ څخه غږیږو، په همدې توگه د ریشنلگڼونو ډیری او داسی نور. په دې ټولو حالتونو کي د اکسیوم ۱ لپاره د e لپاره 0 او د a په څټ توکی á

د a- سره په نخښه کوو.

دوم – په ځمکګچ یا هندسه کی : د ټولو کونګروا ینځ ځیرونو (څرخون، ځايبدلون، یا راکښنه ، او اینونه یا هندارونه) ګروپونه جوړوي(ما په دې اړه یوه د هندسی برخه هم په یوه کتاب کی راوړې، چېکتاب څخه به تر مخه چاپ شوي وي، دا کلیمي که نا بلدې وې نو بیا دې هلته وکتل شي).

دریم : د ټولو ریشنلګڼونو ډیری Q^* او د ټولو رییلګڼونو ډیري R^* توکي، چی د صفر سره، نسبت و ځل یا ضرب ته، نابرابر یا نامساوي وي، یو ابلګروپ جوړوي، دا د ډیریو Q^* او R^* ځلونکی ګروپ یا ضربګروپ بلل کیږي. په دې ګروپونو کی e د 1 او á د ماتګڼ $1/a$ په ځیر لیکل کیږي.

څلورم: M دې یو په خوښه ناتش ډیری وي ، او S_M دې د M د ټولو بییکتیو ځیرونو یا بیکشنونو ډیری وي. د هر دوه ځیرونو $f,g \in S_M$ لپاره $f \circ g$ د دې دواړو ځیرونو یو په بل پسی راوړنو له لارې ټاکل شوی ځل دی. د هر درې ځیرونو f,g,h او هر $x \in M$ لپاره دا لاندې باور لري

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(hx) = f(g(h(x)))$$

او

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)));$$

دا په دې مانا چې اکسیوم ۱ پوره دی. که د e لپاره د M کتمټ څیرونه id وټاکل شي، نو اکسیوم ۲ باور لري.
بالاخره اکسیوم ۳ باور لري، که د ورکړ شوي $f \in S_M$ لپاره د څیرونی $f^{!}$ ، هغه f ته په څټ څیرونه f^{-1} وټاکل شي. ډیری S_M د یو په بل پسی د څیرونو ځلونی یا ضربوني له امله یو ګروپ جوړوي، چی د ډیري M سیو-متري ګروپ بلل کیږي.
که په ځانګړي توکه ډیری M ډیری $\{1,2,3,\ldots,n\}$ وي، نو دا اړونده سیومتري ګروپ څیفرونه یا ګڼونه $1, 2, 3, \ldots, n$ په ساده توګه د S_n سره په نخښه کوو. هره څیرونه $f \in S_n$ د ګڼونو $1,2,3,\ldots,n$ پرموتیشن یا بدلون دی.
که $f(1) = a_1,\ f(2) = a_2,\ \ldots,\ f(n) = a_n$ باور ولري، نو f د څیره ګڼونو پرلپسی لړی $a_1, a_2, \ldots, a_n$ یواځنی ټاکلی ده.
موږ لیکو $f = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$، که د بیلګي په توګه باور ولري $n = 3$ او $f = (2,3,1),\ g = (3,2,1)$ نو لاندې ځلونه یا ضربونه لاس ته راځي

$$f \circ g = (1,3,2) \quad \text{او} \quad g \circ f = (2,1,3)$$

دا بیلګه ښایي، چی S_n د $n = 3$ لپاره ابل ګروپ یا کموتاتیو ګروپ نه دی.

۳ . ۱ . ۳ یادونه: دا د صفر سره نامساوي ټولګټوونه ، نسبت و څلونی یا ضرب ته ګروپ نه جوړوي، ځکه چی د بیلګي په توګه و 2 ته کوم ټول ګڼ $\acute{a}$ وجود نه لري، د کوم لپاره، چی $2.\acute{a} = 1$ باور ولري.

د ګروپ د اکسیومونو څخه کیدی شي ، چی په لاندې کی یو څو ساده «لاس ته راوړنی » رابیلي کړو. په لاندې کی دې G تل یو ګروپ وي

۳ . ۱ . ۴ مرستندوي جمله: د هر توکی $e \in G$ لپاره، چی اکسیومونه۱ ، ۲ پوره کوي دا هم باور لري $a^\circ e = a$ د ټولو $a \in G$ لپاره. له $\acute{a}\,{}^\circ a=e$ څخه $a^\circ \acute{a} = e$ لاس ته راځي.

اوبی یا ثبوت: لمړی دوهمه غوښتنه ښوول کیږي: و a' ته د اکسیوم۳ له مخی یو $a\in G$ د $a'.a = e$ سره موجود دی.
د اکسیومونو۱ او ۲ په پام کی لرلو سره لاس ته راځي

$$a\,{}^\circ a' = e^\circ(a^\circ a') = (a''^\circ a')^\circ(a^\circ a') = a''^\circ((a'^\circ a)^\circ a')$$
$$= a''^\circ(e^\circ a') = a''^\circ a' = e$$

له دې څخه اوس لمړی غوښتنه لاس ته راځی

$$a \circ e = a \circ (a' \circ a) = (a \circ a') \circ a = e \circ a = a \quad *$$

۳ . ۱ . ۵ مرستندوي جمله: ټیك یو توکی $e \in G$ موجود دی، چی هغه په اکسیوم ۲ او اکسیوم ۳ کی غوښتل کیږي. همدا اوس له $x \circ a = a$ څخه د ټولو $a \in G$ لپاره لاس ته راځي: $x = e$.

اوبی یا ثبوت: توکی e^* دې هم برابرون $e^* \circ a = a$ پوره کړي، د ټولو $a \in G$ لپاره. نو بیا په ځانګړي توګه د ۳ . ۱ . ۴ مرستندوي جملې له امله باور لري

$$e^* = e^* \circ e = e$$

دا په دې مانا چي e یواځنی ټاکلی دی. که بیا هم ورپسی باور ولري $x \circ a = a$ د یوه کره ټاکلی توکي $a \in G$ لپاره، نو د اکسیوم ۳ له امله یو $a' \in G$ موجود دی د $a' \circ a = e$ سره، او د ۳ . ۱ . ۴ له امله لاس ته راځي:

$$x = x \circ e = x \circ (a \circ a') = (x \circ a) \circ a' = a \circ a' = e \quad *$$

دا په دې توګه د اکسیومونو سره یواځنی ټاکلی ناپیلی یا بی

تاثیره د ګروپ G توکی e د ګروپG «یوی توکی» بلل کیږي.
په زیاتونډوله لیکلي ابلګروپ G کي ناپیلي توکی e د G «صفرتوکی» 0 بلل کیږي.

۳ . ۱ . ۶ مرستندوي جمله : په اکسیوم ۳ کي 'a د a له لارې یاد a سره یواځنی ټاکلی ده .

اوبی یا ثبوت: د $a' \circ a = e$ تر څنګ دې $a^* \circ a = e$ هم باور ولري. پرتله ۳ . ۱ . ۴ له امله لاس ته راځي

$$a^* = a^* \circ e = a^* \circ (a \circ a') = (a^* \circ a)\circ a' = e\circ a' = a'$$

دا توکی 'a د a « په څټ توکی» بلل کیږي او د دې لپاره په ټولیزه توګه a^{-1} لیکل کیږي. که په ځانګړي توګه د ګروپ- عملیي یا د ګروپتړنی زیاتون ډوله ولیکل شي
پرتله ۳ . ۱ ۲ الف، نو ناپیلی توکی په 0 سره لیکل کیږي او د a په څټتوکی د a- سره لیکل کیږي.

۳ . ۱ . ۷ مرستندوي جمله: $(a^{-1})^{-1} = a$
او $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$

اوبی: دا په ۱ . ۳ . ۴ کی ښوول شوي برابرون $a \circ a' = e$

له مخې لرو، چې a و a^{-1} ته په ځنې توکی دی، چې په دې توګه لمړی غوښتنه باور لري. دومه له لاندې څخه لاس ته راځي

$$(b^{-1} \circ a^{-1}) \circ (a \circ b) = b^{-1} \circ ((a^{-1} \circ a) \circ b)$$
$$= b^{-1} \circ (e \circ b) = b^{-1} \circ b = e \qquad *$$

۳ . ۱ . ۸ مرستندوي جمله: په یوه ګروپ G کی برابرون $x \circ a = b$ او $a \circ y = b$ په ورکړشوو توکو $a,b \in G$ سره یواځني ټاکلي حلونه یا اوبیونی $x,y \in G$ لري.

اوبی یا حل : که $x \in G$ د لمړي برابرون اوبی وي، یعني که باور ولري $x \circ a = b$ نو لاس ته راځي:

$$x = x \circ e = x \circ a \circ a = b \circ a$$

دا په دې مانا، چې x د a او b سره یواځنی ټاکلی . په ځپ د

$$(b \circ a) \circ a = b \circ (a \circ a)\, b \circ e = b$$

له امله توکی $x = b \circ a$ په رینښتونی یو اوبی یا حل دی.
په همدې توګه دوهم برابرون هم پای کولی شو. *

په لاندې کی غواړم، چې داپورته د ګروپ تعریف لږ وغزوم

او په دې توګه ګروپوئيد او نيمګروپ تعريف کړم. دا کار په زياتو ادبياتو کی لمړی سر ته رسيږي، خو داسی تعريفونه يی هم په پوهيدلو کی ستونځي نه رامنځ ته کوي او ما هم غوښتل، چی موږ لمړی د ګروپ کليمه باندې وپوهيږو، چی بنسټيزه ده.

۳ . ۱ . ۹ **تعريف** : يو ډيری G ، چی نسبت و يوه اپريشن يا ګنډنی يا عملي ° ، چی موږ يی دلته د ځل عمليي « . » په څير ښايو، ته رابند وي، نو دې ډيري ته ګروپويد وايو، ياني که د هرې جوړې (a,b) د a ,b ∈ G لپاره يو توکی c ∈ G موجود وي ، د کوم لپاره چي باور ولري a.b = c ليکنه يی په لاندې توګه ده (G , .) .

دا د ګروپوئيد کليمه لږ را تنګوو او نيمګروپ تعريفوو.

۳ . ۱ . ۱۰ **تعريف** . هغه ګروپوئيد G، په کوم کي، چی پورته د ګروپ اکسيوم ۱ باور ولري يا نی ځل يی اسو- ثياتيو وي، نيمګروپ بلل کيږي، چی په همغه پورته توګه د اوس لپاره نخښوڼ کيږي.

دا چې نیمګروپ همغه ګروپ دی، دا لاندې جمله یې روښانه را په ګوته کوي

۳ . ۱ . ۱۱ جمله : یو نیمګروپ G هلته او هلته یو ګروپ G دی، که په G کې کم له کمه یو ښې یویتوکی e موجودوي، چې لاندې شرطونه پوره کړي

$ae = a$ لپاره $a \in G$ د ټولو

او دا توکی e داسې وټاکل شي، چې د هر $a \in G$ لپاره کم له کمه یو ښې په څټ توکي $a \in G$ موجود وي، چې غوښتنې

$$a \,.\, a^{-1} = e$$

پوره کړي.

اوبې یا حل : که دا پورته ورکړ شوې غوښتنې پوره وي، خو دا مو وښوول، چې ګروپ جوړوي. اوس دې یو نیمګروپ G راکړ شوی وي، چې پورته نیونې پوره کوي. دا غواړو وښایو، چې e په G کې یو کیڼ یویتوکي هم دی. که د a^{-1} سره د a ښې په څټ توکی وښایو ، نولاس ته راځي

$$eaa^{-1} = ee = e = aa^{-1}$$

که د برابرون دواړه خواوې د یوه و a ته په ځټ توکي سره ځل کړو او د نیمګروپ د ځل یواځنوالي قوانین وکاروو یا استعمال کړو، نو لاس ته راځي

$$eae = ae$$

له کوم ځخه چې د حلونکی یا اوبیوونکی اړیکی $ea = a$ لاس ته راځي.

بالاخره د G ګین یویتوکي e' او ښی یویتوکي e'' رانیسو، نو د مخ ته تیرو جملو ثبوت ځخه دا اوبي یا حل $e'' = e'$ لاس ته راځي، چی په دې توګه د G یوي(یویتوکي) e موجودیت او یواځنتوب وښوول شو.

بیا دې a^{-1} د یوه توکی $a \in G$ ښی په ځټ توکی وي.

که برابرون $aa^{-1} = e$ له کیڼ لور د a^{-1} سره ځل کړو، نو لاس ته راځي

$$a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$$

د a د ښي په ځټ توکي د اخرني برابرون ځلولو یا ضربولو ځخه لاندې نتیجی ته راځو

$$a^{-1}ae = e$$

له کوم، چی $a^{-1}a = e$ لاس ته راځي.

دا توکی a^{-1} ته له دې امله یو کیڼ په څټ توکی هم دی.
لکه د مخه تیرې جمله د د ثبوت په توګه، کیې شي ساده وښوول شي، چې د a هر ښی په څټتوکي د کیڼ په څټتو کی سره پریوځي یا هغي سره ورته دی.
په دې توګه په G کې د هر توکی a لپاره د هغه توکی په څټتوکي موجودیت په یواځنی توکه تضمین دی.
د جملې د ثبوت د پوره کیدو لپاره دې په ګوته شوی وي، چې توکي

$$x = a^{-1}b \quad \text{او} \quad y = ba^{-1}$$

د برابرون $ax = b$ او $ya = b$ حل ښايي. دا حلونه یواځنی دي، ځکه، چې $ax = xa$ دی، نو له کیڼ څخه یی د a' سره ځلوو او $x = x$ لاس ته راځي. پای یا *

د ابلګروپ د څیړنی لپاره، د ځل عملیې په ځاي د زیاتون ګنډنه یا عملیه په کار اچوو، چې ناپیلی توکی یی 0 دی او هر توکی a ته په څټ توکی یی د a- سره په نخښه کوو.
دلته هم همغه پورته جمله کاروول کیږي، خو د ښی یویتوکي لپاره 0 صفر یوي توکی دی او ښی په څټ یی a- دی. د په څټ عملیې یواځنتوب

د یوه نیمګروپ بیلګه چې ګروپ نه وي.
که د طبیعی ګڼونوډیری N پام کی ولرو، نو دا ډیری د زیاتونعملیي ته نیمګروپ جوړوي، خو دا ګروپ نه دی، ځکه، چې په دې ډیري کی، په هر حالت کی کمون نه دی تعریف.

که نسبت و ځل ته د ګڼونو څخه ګروپ جوړوو، نو باید دا مو پوره په پام کی وي، چې دا ګڼونډیری د صفر توکی ونه لري، ځکه چې په صفر پرویشنه نه ده تعریف.

۳ . ۲ بدن یا تن او کړی

Körper und Ring (Field and ring)

په داسی حال کی چې د ګروپ اپریشنونه یا ګروپ عملیي یواځی له یوه ترونعملیي څخه منځ ته راځي، اوس دوه عملیي څنګ په څنګ راوړل کیږي، چې په ورسره د ګڼو- نشمیرني بلد ډول، چې زیاتون «+ » او ځل یا ضرب « . » سره ښوولکیږي، تکیه کوو. که له ریشنل ګڼونو څخه مخ ته ولاړ شو، نو د هلته باوري شمیر قاعدو څخه

په ورته ذهنیت، لکه په ګروپونو کی، نوي الجبري جوړ-
ښتونه لاس ته راځي.

۳ . ۲ . ۱ **تعریف** : یو بدن یا تن د یوه ډیري F او دوه عملیو + او . څخه جوړدی، چی د F د توکوهره جوړه (a,b) د F په یوه یواځنی توکی a+b همداسی a.b باندې داسی څیره کړي، چی لاندې باوري کړي یا لاندې په کی باور ولري:

ډیری F دې و + ته یو ابل ګروپ وي، دا په دې مانا، چی لاندې باوري کیږي

۱ - د زیاتون اسوشاتیو قانون

. د ټولو $a,b,c \in F$ دلپاره $(a+b)+c = a+(b+c)$

۲ - د زیاتون کموتاتیو قانون

د ټولو $a,b \in F$ لپاره $a+b = b + a$

۳ - په F کی یو صفر توکی 0 شته، دا په دې مانا چی $0+a = a+0 = a$ باور لري د ټولو $a \in F$ لپاره.

۴ - هر توکی $a \in F$ ته یو توکی $-a$ په F کی موجود

دی د $(-a)+a=0$ سره ، د کوم سره چي 0 په F
کی صفر توکی دی

د F توکو د ځل یا ضرب . لپاره باور لري

۵ - اسوشیاتیو قانون

د ټولو $a,b,c \in F$ لپاره $(a.b).c = a.(b.c)$

۶ - په F کی یو یویتوکی 1 شته ، دا په دې مانا ، چی $1.a = a.1 = 1$ د ټولو $a \in F$ لپاره .

۷ - هر توکی $a \in F$ ته د $a \neq 0$ سره ، یو توکی a' د $a.a' = 1$ سره موجود دی ، چیرته چی 1 د F یوی توکی دی.

۸ - دیستریبوتیو قانون

$a.(b+c) = a.b + a.c$ او $(b+c).a = b.a + c.a$
د ټولو $a,b,c \in F$ لپاره

۹ - $1 \neq 0$

که یواځي د اکیسیومونو ۱ - ۵ او ۸ باوریتوب وغوښتل شي، نو F ـهَ کړی بللل کیږي.
که برسیره پر دې اکسیوم ۱۰ باور ولري یعنی

۱۰ - د ځل کموتاتیو قانون

د ټولو $a,b \in F$ لپاره $a \cdot b = b.a$

نو F یو کموتاتیو تن یا کموتاتیو بدن او همداسی کموتاتیوکړی بلل کیږي

لکه څنګه په ګروپ کی په همدې توګه یوه کړی یا تن هم د $(F.,+,.)$ په ځاي د F سره په نخښه کوو. د ځل لپاره سومبول «.» نه لیکل کیږي او د دې لپاره لنډ لیکو ab . ډیر واره د «بدن» یا «تن » لاندې کموتاتیو بدنونه پو- هیږو، په داسی حال کي، چی ناکموتاتیو بدنونه ، «کاږه بدنونه» بلل کیږي. دلته به موږ تل کموتاتیتو بدنونه تر څیړنی لاندې نیولي وي.

د اکسیوم ۱ او اکیسوم ۵ له امله کیدی شي، چی نوکان نور هم پرینښوول شي یا تیریدنه ترې وشي یا ونه لیکل شي. د نوکانو د نه لیکلو لپاره یو بل د مخه پیژندل شوی قرارداد یا پریکړې یو قاعده هم شته، چی د ټکو لکه ځل عملیه د کرښو لکه زیاتون عملي څخه د مخه اجرا کیږي.
لکه د $(ab)+c$ په ساده توکه $ab+c$ لیکل کیږي. دا ساده- والی همدا اوس د اکسیوم ۸ په فرمولولو کی وکارول شو.
د بدن F یا همداسی د کړی R ناپیلی توکی وزیاتون ته صفر-

توکی دی او یا لنډ صفر دی. دا په څنګ توکي a- و a ته منفی توکی بلل کیږي. د b+(-a) په ځاي لنډ لیکوه b - a او دا کارونه د a او b کمون بولو.
باور لري $a+(b-a)=b$ او $b-a$ د ۳ . ۱ . ۸ له مخی د برابرون $a+x=b$ یواځني حل دی. د ۳ . ۱ . ۷ له امله بالاخره باور لري $-(-a)=a$ او $-(a+b)=-a+(-b)=-a-b$.
دا د $F^*=F\setminus\{0\}$ ځلګروپ ناپیلي توکی 1 د بدن یا تن F یویتوکي یا ساده یوی بلل کیږي. کړی دي ته ضرورت نه لري چی یویتوکي ولري» که یویتوکی موجود وي نو یواځنی به ټاکلي وي.

۳ . ۲ . ۲ د بدنونو لپاره بیلګي

الف – د ریشنلګڼونو ډیری Q او همداسی د رییل ګڼونو ډیري R په ورسره بلدو تړنو یا عملیو له لارې یعنی زیاتون او ځل له لارې هر یوکموتاتیو بدن یا تن جوړوي،

ب – د ټولو کمپلکسګڼونوډیری C هم یو کموتاتیو بدن یا تن جوړوي. په روښانه توګه یا ډول یو کملکس ګڼ a دا لاندې بڼه لري $a=a_1+a_2i$ د رییل ګڼونوa_1, a_2 سره او

ایماګیناریوون i سره، د کوم لپاره چی $i^2 = -1$ باور لري.
دا a_1 د a رییل برخه او a_2 د a ایماګینار برخه بلل کیږي.
په نخښونه : $a_1 = Re(a)$ او $a_2 = Im(a)$
که $b = b_1 + b_2 i$ یو دوم کمپلکس ګڼ وي، نو زیاتون،
کمون او ځل یی په څرګنده توګه په لاندې ډول روښانه دي
یا تشریح شوي دي:

$$a \pm b = (a_1 \pm b_1) \pm (a_2 + b_2)i ,$$
$$a\,b = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\,i$$

دا و کمپلکس ګڼ $a = a + ai$ ته کوجوګیري کمپلکس
ګڼ $\bar{a}$ د $\bar{a} = a_1 - a_2 i$ سره تعریف دی . په دې پسی تړلي
لاس ته راځي

$$\overline{a \pm b} = \bar{a} \pm \bar{b}, \quad \overline{ab} = \bar{a}\,.\,b\,, \quad \bar{a} = a\ ,$$
$$a + \bar{a} = 2Re(a) \quad , \quad a - \bar{a} = 2iIm(a)$$

د یوه په خوښه کمپلکسګڼ a لپاره باور لري

$$a\bar{a} = (Re(a))^2 + (Im(a))^2$$

له دې امله $a\bar{a}$ تل یو نامنفی رییلګڼ دی، او $a\bar{a} = 0$
د $a = 0$ سره برابر ارزښته دی.
که $|a| = 0$ یو کمپلکسګڼ وي، نو باور لري $|a\bar{a}| = 0$

او $a = \bar{a} / aa \in C$. د کمپلکس ګڼ ارزښت $|a|$ ،
چې $a = a_1 + a_2i$ د نامنفي رييلګڼونو ريښه ارزښت
دی $a\bar{a} = a_1^2 + a_2^2$ دا په دې مانا، چې

$$|a| = + \sqrt{a^2 + a^2} .$$

رييلګڼونه ځانګړي کمپلکس ګڼونه دي، په نامه هغه ګڼونه،
چې ايماګينار يی ورکيږي: کمپلکسګڼ ټيك هلته يا هلته او
هلته يو رييلګڼ دی، که $a = \bar{a}$ وي.

۳ . ۲ . ۳ د کړيو لپاره بيلګی:

الف –د ټولو ټولګڼون ډيری Z يوهکموتاتيو کړی‌ده، د"يوي
سره.* مګر Z بدن نه دی، ځکه، چې د بيلګي په توګه ۲
په Z کی نسبت و ځل ته په څټ نه لري. يعنی $1/2$ په Z
و 2 ته په څټ توکی نه دی.

ب – جوړه ټولګڼونه $R = 2Z$ ددي لپاره بيلګه ده، چې
صفرتوکی نه لري.

پ – F دې يو کموتاتيو تن وي. يوه د لاندې بڼي افاده

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

د $a_i \in F$, $i = 0,1,2,...,n-1,n$ سره پولینوم بلل کیږي د یوې نامعلومې x سره او چی ځلووني یا ضریبونه او یا کوایفځینتونه یي له F وي. که $a \neq 0$ وي، نو n د پولینوم f (x) درجه بلل کیږي.

نخښونه یی: ګراد Grad f = n

که حتی $a = 1$ وي، نو f(x) یو نورمي شوی پولینوم normiertes Polynom بلل کیږي. د صفر درجي پولینومونه ثابتی دی د $0 \neq a \in F$ سره. صفر پولینوم 0(n=0,a=0) سره درجه نه ترتیب یا تنظیم کیږي.

د ټولو پولینومونو f(x) ډیری، چی ځلووني یی له بدن F څخه وي د F[x] سره په نخښونو یا په نخښنه کوو. په F[x] باندې زیاتون (په ورکړشوی حالتکي د صفرځلوونو سره) او یو ځل یا ضرب په دې لاندې ډول تشریح شوي

$$(a_0 + a_1x+a_2x^2+,,,+a_nx^n)+(b_0+b_1x+ b_2x^2+...+b_nx^n)$$
$$= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x +...+(a_n+b_n)x^n \quad ,$$

$$(a_0+a_1x+...+a_mx^m).(b_0+b_1x+...+b_nx^n)$$
$$= a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+ ...+a_mb_nx^{n+m}$$

و زیاتون « + » او ځل « . » ته [F[x یوه کړی‌ده،
د پولینو 1 سره د یویتوکي په څیر. پولینومډیری [F[x
پولینوم کړي په F باندې بللکیږي د ناپیژنونکی x سره.

دي تراوسه یادشوو بدنونو ترمنځ د کمپلکس ګنونوګروپ
یو ځانګړی ځاي لري، له دې امله په ځانګړي څیړنی کی
ځانګړی رول لري، ځکه چی ددې لپاره د الجبر اصلي
جمله باور لري کومه چی په لاندې ډول ده :

۳ . ۲ . ۴ جمله: هر یو پولینوم $f(x) \in C[x]$
د $\text{Grad } f > 1$ سره د لاینی پولینومونو په ځلوونویا ضریبونو
ټوټه کیږي، دا په دې مانا، چی $f(x)$ ته ډیر پای مختلف
کمپلکس ګنونه c موجود دي، او طبیعي ګڼونه k په داسی
توګه یا ډول چی لاندې باوري کوي:

$$f(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - c_i)^{k_i} \quad \text{او} \quad \text{Grad } f = \sum_{i=1}^{m} k_i.$$

دا جمله دلته نه ثبوت کیږي.

دا لاندې جملی دا را په ګوته کوي، چی په خوښه کړیو او
بدنونو یا تنونوکي ، په ورسره بلد ډول شمیرنه کیږي

۳ . ۲ . ۵ مرستندوي جمله:

په یوه کړی کی باو رلي: $0.a = a.0 = 0$ د هر توکي a لپاره .
اوبی یا حل :د $0 = 0+0$ اوی د اکسیوم۸ له امله باورلري:

$$0.a+0.a = (0+0) .a = 0.a$$

د دې او ۳ . ۱ . ۴ څخه لمړی اوبی $0.a = 0$ لاس ته راځي، دوهم اوبی یا حل په ورته توګه لاس ته راځی . *

۳ . ۲ . ۶ مرستندوي جمله: په یوه کړی کې باور ري

$$a(- b) = (- a).b = - ab$$

په ځانګړي توګه دا لاندې باور لري

$$(- a) (- b) = ab$$

اوبی: د ۸ او ۳ . ۱ . ۴ له امله لاس ته راځي

$$ab + a(- b) = a(b- (b)) = a . 0 = 0$$

په دې پسی $a (- b)$ و ab ته منفي توکی دی، دا په دې مانا چی باور لري

$$a(- b) = - (ab)$$

په ورته توګه دوم برابرون لاس ته راځي. *

د مخه مو د بدن کليمه روښانه کړه، اوس غواړم، چې دا کليمه له يوې بلې لورې هم، يا بهتره، په يوه بل ډول تر څېړنې لاندې ونيسم او هغه په دې ډول، چې هغه مو ورسره بلد د ترونکارونو نخښې ونه کاروم او دوه ذهني ترونونه راوړم، چې وروسته کار مو بيا همداسې مخ ته بيولی دی:

۳ . ۲ . ۷ تعريف :د ډيري M هغه جوړښتونه بدن بلل کيږي، د کومو لپاره چې باور ولري:

۱ - په ډيري M کی دوه تړاونه ° او o تعريف دي
۲ - دلته (M ; °) کموتاتيو ګروپ دی.
۳ - دلته (M\e$_0$; o) يو ګروپ دی او e$_0$ يو ناپيلی توکی دی و° ته.

دا لاندېقوانين باور لري:

۴ - ديستريبوتيو قانون: ao(b°c) = (a° b)o(a°c)

(a° b)oc = (aoc)°(boc)

په يوه کموتاتيو بدن کې په دې برسيره باور لري

۵ - کموتاتيو قانون : aob = boa

۳ . ۳ لاندېګروپ او لاندېکړي

۳ . ۳ . ۱ تعریف : د یوه ګروپوئید G برخډیری یا لاندډیري U ګرپوئید بلل کیږي، که د U د هرو دوه توکو همغه تړنه ° (ځل) د دې ډیري U توکی وي.
که G نیمګروپ وي، نو بیا په نتیجه نیونه کی له یوه لاندې نیمګروپ څخه غږیږو.

۳ . ۳ . ۲ تعریف : یو د ګروپ G برخډیری U یو د ګروپ G لاندېګروپ یا سبګروپ Subgrupp بلل کیږي، که U نسبت د ګروپ G ګرپ عملیو یا ګروپتړون ° ته پخپله ګروپ وي.
په نخښونه $U < G$.

۳ . ۳ . ۳ مرستندوي جمله: د ګروپ $(G, ^\circ)$ یو ناتش برخډیری U تېیك هلته یا هلته او هلته د ګروپ G لاندېګروپ یا سبګروپ دی، که د هرې جوړې $a,b \in U$ لپاره تل باور ولري

$$a \circ b \in U$$

اوبی یا حل: شرایط په پوره باور ضرور دي. دا باید وښوول شي، چی پوره کیدونکي هم دي.
دلته دې e د G یوی توکی وي. د $U \neq \emptyset$ له امله یو $a \in U$ موجود دی. نو لرو $e = a^\circ a' \in U$ او e د U یوی توکی دی. وریسی باور لري $a = e^\circ a \in U$ د هر $a \in U$ لپاره. د مرستندوي جملي له امله لرو $a^\circ b \in U$
د ټولو $a,b \in U$ لپاره.
ساده کتل کیږي، چی په U کی اسوشیاتیو قانون باور لري.
پس $(G, ^\circ)$ یو ګروپ دی.

۳ . ۳ . ۴ تعریف : د یوې کړۍ R لاندېډیری A، نسبت و هغه په R کی تعریف شوو عملیو ته، یوه لاندې– کړۍ بلل کیږي. دا په دې مانا، چی په A کی د R ټولې ترنې یا عملیې باور ولري. یا په بل عبارت، چی A نسبت و زیاتونګروپ ته یو لاندې زیاتونګروپ جوړوي او د R ځلګروپوئید ته لاندېګروپوئید جوړوي، او په همدې ډول په R کي تعریف دیستریبوتیو قانون په لاندېډیري A کی هم باور لري.

په ورته توګه د بدن یا تن F لاندې تن هم تعریف دي.

۳ . ۳ . ۵ جمله : د G لاندېګروپونه پخپله G او یونلاندیګروپ E ، چې له یویتوکی څخه جوړ دی، دي. په ورته توګه د کړې R لاندیکړې پخپله R او د صفر-توکي څخه جوړه شوې ، صفرکړې دي.

د نورو لاندیګروپونو غوره بیلګو جوړولو لپاره د یوه توکی د پوتنځ (Potenz) کلیمه پلی کوو یا رامنځ ته کوو. G دې یو په خوښه نیمګروپ وي او a دېد هغه په خوښه یو توکي وي.د ځل اسوځیاتیو قانون دا اجازه راکوي، چې په یواځنی توګه (یواځنی ته دې د ګرانو لوستونکو تل پاموي، چې د څه لپاره کارول کیږي) د یو په خوښه پوتنځ یا توان

$$a^n, \quad n = 1,2,\ldots,n$$

تعریف کړو، او دا باور لري

$$a^k \cdot a^l = a^{k+l} \qquad (1)$$

$$(a^k)^l = a^{kl} \qquad (2)$$

له (1) څخه لاس ته راځي، چې په یوه نیمګروپ G کی د یوه توکی ټول مثبت توانونه یو ابل نیمګروپ جوړوي، چې د a توکي څخه منځ ته راغلی یا جوړ ځیکلیکي یا بیرته راګرځیدونکی لاندېګروپ بلل کیږي.

که G برسيره پر دې يو ګروپ وي، نو لمړی داسی نيسو، چی $a^0 = 1$ او بالاخره د توکي a منفی توانونه هم پلي کوو. که n يو طبيعي ګڼ وي نو د لاندې برابرون

$$a^n (a^{-1})^n = 1$$

راجوړيدنه په ساده توګه کتل کيږي، له کومی چی بيالاس ته راځي

$$(a^{-1})^n = (a^n)^{-1} \qquad (3)$$

دا توکی، چی د (3) دواړه خواو کی يی ځاي نيولی د a^{-n} سره ښايو يا په نخښه کوو. برابرونونه (1) او (2) د ګروپ G د يوه ټولګنيز توکي a لپاره ريښتوني پاتي کيږي او د a ټول توانونه د صفر او منفی پوتنځ پورې له دې امله د G يو لانديګروپ جوړوي. دا لاندې ګروپ د a څخه جوړ بيرته راګرځيدونکی zyklische Untergruppe لاندېګروپ بلل کيږي او په $\{a\}$ سره په نخښه کيږي.
په زياتون ليکدود سره بيا د a دپوتنځ په ځاي د هغه ډيرخلی راوړل کيږي.

په ګروپ G کی د يوه توکي a توان يا پوتنځ په مختلف جګګڼ يا اکسپوننت Exponent سره ضرور د مختلف

ګروپ توکي نه ورکوي یا نه رامنځ ته کوي، کوم چی د ناپاي ګروپ له موجودیت څخه جوتیږي. که د a ټول توانونه توپیر ولري یا په بل عبارت مختلف وي، نو a د ناپایډیر نظم توکی بلل کیږي، په بل ډول بیا یو د پاینظم توکی بلل کیږي.
په دوم حالت کی یو ټولګڼ k او یو ټول ګڼ l د $k > l$ او

$$a^k = a^l$$

سره موجود دي.
له دې څخه لاس ته راځي $a^{k-l} = 1$ ، چیرته چی $k - l > 1$ دی، نو له دې امله د a توانونه شته، چی د یویتوکي سره برابر دي. ددې اکسپوننت یا جګګڼ کوچنی مورږ د a نظم بولو یا نوموو.
که a یو د پاینظم n توکی وي، نو بیا په روښانه توګه توکي

$$1 = a^{\circ}, a, a^2, \ldots, a^{n-1} \qquad (4)$$

ټول یو له بل توپیر لري او هر ورپسي منفی یا مثبت د a پوتنځ a^k د یوه دې په (4) کی وکړشوو توکو سره برابر دی. دا په لاندې ډول لیدل کیږي: دی

$$k= nq+r, \qquad 0 < r < n$$

نو له (1) او(2) اړيکو a = 1 څخه لاس ته راځي:

$$a^k = (a^n)^q a^r = a^r$$

له دې سره د پاينظم توکو لپاره لاس ته راځي: ديوه توکي a نظم د هغه توکی n څخه تولید شوي يا جوړ شوي بيرته راګرځيدونکي يا څيوکليکي لاندې کروپ {a} سره برابر دی يا د هغه سره سر خوري.

هغه ګروپونه، چی يواځي د پاينظم توکي لري تورزيونګرپونه Tursionsgruppen يا پريودي ګروپونهperiodische Gruppen يا بيرته راګځيدونکي ګرپونه بللکيږي، په بل ډول ناپريودي ګروپونه Torsionsfrei Gruppen بلل کيږي.

اوس دا پوښتنه د کړيو لپاره، لکه د بيرته راګرځيدونکی لانديګروپ لپاره، رامنځ ته کيږي، چی ايا داسی يوه لاندېکړی يا مينيمال لانديکړی شته، چي يو وړکړ شوی توکی ولري. R دې يوه ورکړشوې (ناضروري اسوځياتيو) کړی وي اوa دې يو د هغی کړی په خوښه توکو څخه يو توکی وي. هر د هغه لانديکړی د توکي a سره ټول ځلونه، په کومو

کی چی ټیك فاکتور a رامنځ ته کیږي، د کوم یوه ګڼون یا تعداد ..,3 , 2 , 1 = n سره، دا فاکتور د a د مثبت پوتنځ یا توان رول لوبوي. دا چی ځل باید ضرور اسوشیاتیو نه وي، نو په ټولو توپیریزو ډولونو ، جوړه ډوله په نوکانو کی نیول کیږي، چی په دې توګه د کړی دوه فاکتورونه یو د بل سره ځلیږي یا ضربیږي. د 3 = n لپاره ځل (a(aa او a(aa)) او 4 = n لپاره ، او همداسی د 5 = n لپاره اوداسی وریسی.
هر لاندېکړی د a سره ټول زیاتونونه ، ورکړشوي پاي زیاتو ځلونه، کوم چی د ټولګڼیز فاکتور سره سنبال وي خوندي لري. داسی د R توکی . چی په دې زیاتونیز ډول لیکل کیږي د خپلی لور ځخه په R یو لاندې کړی جوړوي او دا، هغه غوښتونکې یا لټوونکې د a ځخه جوړه، لاندېکړي بلل کیږي.
د یوه اسوشیاتیوې کړیR لپاره د یوه توکی a ځخه جوړ لاندېکړی لاندې د R د ټولو توکو ځخه جوړه لاندېکړی، چی په یوه ډول د a زیاتون او مثبت پوتنځ ځخه جوړه وي لاس ته راځي(د ټولګڼیز ځلوونو سره). دا کړی له دې امله کموتاتیو ده.

د یوه ګروپ هر لاندېګروپ د دې ګروپ یویتوکی لري، د

یوې کړۍ هره لاندېکړۍ په همدې توګه د دې صفر توکی لري. دګروپ G لاندې ګروپونو (په همدې توګه د کړۍ R لاندېکړیو) غوځی له دې امله تشډیری نه دی .

۳ . ۳ . ۶ جمله : د ګروپ G د لاندېګروپونو یوه سیستم غوځی بیرته د G لاندېګروپ دی. په همدې توګه دکړۍ R د لاندېکړیو د یو سیستم غوځی، د دې کړۍ لاندېکړۍ جوړوي. د لاندې نیمګرپونو یوه سیستم غوځی بیرته لاندینیمګروپ دی، که دا تش نه وي، او همداسی ورپسی..

موږ دلته د لمړنی غوښتنی ثبوت مخ ته بیایو. ددې لپاره دې په ګروپ G کی یو لاندېګروپ سیستم A_i ورکړ شوی وي، چیرته چی i یو پڼندډیری یا ایندکسډیریIndexmenge کی ځغلی، او D دې د دې لاندېګروپونو غوځی وي. که چیرې b او c د D په خوښه کوم توکی وي، نو د دوې خل bc په هر لاندې ډیري A_i کی پروت دی او په ورپسی توګه یا په لاس ته راوړنی سره سملاسی هم په D کی پروت دی. نو له دې امله b^{-1} د په خوښه $b \in D$ لپاره په هر A_i کی پروت دی او له دې امله په D کی هم پروت دی. پس D د G لاندې ډیری دی.

اوس نیسو چی G دې یو ګروپ، کړی او یا په همدې توګه یو تن یا بدن یا کوم یو بل، مور ته څرګند، الجبري سیستم وي، کوم چی تراوسه پیژنو. د M سره د G لاندېګروپ ښایو، نو یو مینیمال لاندېګروپ(په ورته ډول لاندېکړی، لاندې تن یا لاندېبدن) شته، کوم چی M خوندي لري. دا د M سره جوړه شوي یا تولید شوي لاندې کروپ {M } جوړوي او د ټولو M خوندي لرونکود G د لاندېګروپونو غوڅی دی، د کومو څخه، چی کم له کمه یو دا په نامه ګروپ G موجود دی.

د مخه ویل شوي یا ورکړ شوي څیوکلیکي لاندې ګروپ تعریف د ټولیزولو له لارې ساده ښوول کیدی شي، چی لاندیګروپ {M } ټیك د ټولو هغو G توکو څخه جوړ دی، چی د په خوښه ترتیب د پایډیرو M توکو د پوتنځل په بڼه لیکل کیدی شي.

ټیك په همدې توګه د مخه لوستل شوي ټولیزولو له لارې لاندېکړی، چی په R کی له M تولید ټولو توکو جوړ دی، کوم چی په M کي د پاي ډیرو توکو د ځلولو د زیاتون(د ټولګنیز ضریب سره) څخه انځوریدلی شي. په نااسوځیا- تیو حالت کی دې طبعآ ضریبونه د ټول ممکنو نوکانو سره بندې شي.

۳ . ۳ . ۷ یا دونه یا تعریف: که د تیرې برخې د M لپاره، د ګروپ G د ټولو لاندې ګروپونو A_i , $i \in I$ سیستم ونیول شي یا فرض شي، نو د یوه لاندې ګروپ کلیمي ته راځو، چې د ورکړشوو لاندې ګرپونو سیستم له خوا تولید شوی دی. ددې لپاره { A_i , $i \in I$ } لیکو، یا هم {A,B} { }، که دا دلاندې کروپونو ټولنه وي. په همدې توګه کیدی شي په یوه کړی کې هم د لاندېکړی سیستم له لارې تعریف لاندېکړې هم پوهیدل کیدی شي.

۳ . ۳ . ۸ یا دونه یا تعریف . دلته دې G یو ګروپ وي، یوه کړی او همداسی وړپسی. نو په G کی داسی لاندېډیري M شته، د بیلګې په توګه پخپله G، د کوم لپاره چی باور لري

$$\{M\} = G$$

هر داسی لاندېډیري د G لپاره یو جوړیدونکی یا تولیدیدونکی سیستم بلل کیږي . تر هغی، چی G یو پای د تولید-ونکو سیستم ولري، نو دلته د ګروپ)یو نیمګروپ، یو کړی) G ځخه غږیږو، چی پایتولیدیدونکی ګڼون یا

شمیر ولري. په ځانګړې توګه کیدی شي، چی دا جوړوونکی یا تولیدونکی له یوه توکی څخه جوړ وي. دا ګروپ چی یو جوړیدونکی توکی لري او د هغه د ځیوکلیکي لاندې ګروپ سره سر وخوري، ځیوکلیك ګروپ بلل کیږي.

۳ . ۴ . ایزومورفیزم Isomorphimus

دا دلته د هر الجبري سیستم راوړلو کلیمو لپاره د ایزمو- رفیزم کلیمه روښانه کیدی یا تشریح کیدی شي، کومه چی همغه رو ل لوبوي لکه په نیم نظم شوي ډیري کی یی چی لروده.
د بیلګي په توګه ایزمورف ګروپونه یو بل ته کتمټ دي، د یو او همغه ګروپ دوه اکسمپلاره یا نموني ، چی په نیولی دې وي، چی که د ګروپ عملیي یی تړونونه همغه وي، په داسی حال کی چی توکي له کومو چی ګروپونه جوړ دي، طبیعیت یا پیدایښت کوم رول نه لوبوي.
په کره کلك تعریف سره لاندې راوړو:

۳ . ۴ . ۱ تعریف : ګروپوئید G او G' ایزومورف

دي، که د ګروپوئيد يواځنی او په ځټ ځيرونه f د ګروپو-
ئيد G په ګروپوئيد G' داسی موجود وي، چی د په
خوښه a,b ∈ G لپاره باور ولري

$$(ab)f = af.bf$$

په همدې توګه هره ځيرونه ، چی دا غوښتنی پوره کوي،
د ايزومورفی ځيرونی په ځير يي په نخښنه کوو يا يی ايز-
ومورف ځيرونه بولو. د دوه ګروپوئيدو خويونه، چی يو
بل سره ايزومورف وي، سيومتري خويونه دي، (هغه و
ايزومورفی ځيرونی ته په ځټ ځيرونه بيرته ايزومورف
ځيرونه ده)، او ترانزيتيو، دا برسيره پر دې ، که ځيرې
ځوك د ګروپوئيد کتمټ په ځان ځيرونه ورسره وګڼي،
رفلکسيو هم دی. د ايزومورف ګروپوئيدو لپاره په ټوليزه
توګه لاندې ليکدود کارول کيږي يا استعماليږي

$$G \sim G'$$

که چيرې د نورو الجبري جوړښتونو ايزومورفي مو هم
مطلب وي ، نو موږ به بيا هم همدا نخښنه وکاروو.
طبعاً به د ګروپوئيد په ايزومورف ځيرونه کی ټول هغه
خويونه، چی په ګروپوئيد کی ليکل کيږي، لکه اسوځياتيو

قانون، کموتایتو، د یویتوکي موجودیت او د په څېتوکي موجودیت، د ګروپوئید څیرې چه هم ور کارول کیږي یا وروړل کیږي. موږ په ساده بیلګه سره ښایو، چی دا وینا څنګه ښوول کیدی شي. G دې یو کومتایتو ګروپوئید وي او f دې د G یوه ایزمورف څیرونه په 'G وي. که 'a او'b دوه د 'G په خوښه توکي وي او a, b د G هغه توکی وي، د کوم لپاره چی باوړ لري

$$af = f(a) = a' \quad , bf = f(b) = (b)f = b'$$

نو لرو

$$(ab)f = a'.b' \quad , (b.a)f = b'.a'$$

او د برابرون ab = ba او د څیرونی د یواځنتوب څخه a'b' = b'a' دی. له دې څخ لاس ته راځي،

۳ . ۴ . ۲ جمله: د نیمګروپ، ګروپ او همداسی د ابلګروپ یا کموتاتیو ګروپ ایزومورفی څیرې بیرته نیمګروپ، ګروپ او همداسی ابلګروپ دی.

۳ . ۴ . ۳ مرستندوي جمله: دوه کړي یو بل سره ایزومورف دي، که د هغو د توکو ترمنځ یو یواځنی اوپه

ځتکیدونکی نظم یا ځیرونه موجوده وي، چې هغه ځیرونه نسبت و زیاتونګروپ ته ایزومورفیزم وي او هم د کړی و ځلګروپوئید ته ایزمورفیزم وي. د ایزومورف ځیرونی سره طبعآ کړی هغه خویونه، اسوځیاتیو، او کموـ تایتو یا لیکړی liesche Ring او داسی نور وي، ساتي.
د ایزومورف ګروپونو لپاره یوه په زړه پوري بیلګه، د مثبت رییلګڼونو ځلیزه ګروپ او د ټول رییلو ګڼونو زیاتونګروپ جوړوي. که هر مثبت ګڼ د هغه په لوګاریتم باندې تنظیم یا ځیره شي، چې بنسټ یی کره کلك ټاکلی وي ، نو د لمړي ګروپ یو ایزومورف ځیرونه، په دوم ګروپ، لاس ته راځي.
ایزومورفیز له دې ریښتینیو څخه لاس ته راځي، چی د یوه ځل لوګاریتم دې د لوګاریتم د یوګونو فاکتورونو د زیاتون سره برابر یا مساوي دی (د لوګاریتم او قوانینو لپاره دې ځما د شمیر پوهنی کتاب وکتل شي).

موږ اوس هغه ړمخه په ګوته شوې پاملرنه په ځیوکلیکي زیاتونګروپ کی رامخ ته کوو او په یوه بیلګه پیل کوو.
د ټولګڼونو زیاتونګروپ د یوه ناپای ځیوکلیکي ګروپ لپاره بیلګه ده، ځکه، چی هر ټول ګڼ د ۱ څو ځله دی.

۳ . ۴ . ۴ جمله : ټول ناپای څیوکلیکي ګروپونه د ټولګڼونو زیاتونګروپ سره ایزومورف دي او همداډول په خپلو منځونو کی هم. همداسی پاي د n–نظم څیوکلکي ګروپونه یو بل سره ایزومورف دي.

ددې جملی له ثبوت څخه دلته تیرېږو (ثبوت یی په Kuroŝ کی کتل کیدی شي).

۳ . ۴ . ۵ جمله: د ټولګڼونو د صفر لاندیګروپ، څخه توپیري ټول لاندیګروپونه د یوه څرګند طبیعي ګڼ n د ډیرواره ډیري څخه راپیدا دي.

او بی : روښانه ده، چی د یوه طبیعی ګڼ ټول څوواره یو لاندېګروپ، دا په نامه له n څخه جوړ لاندېګروپ جوړوي. د یو بل څخه توپیري ګڼونو n لپاره لاندېګرپونه هم یو له بل توپیر لري. کیدی شي یود ټولګڼونو زیاتون ګروپ، لاندېګروپ A، چی یواځي د منفی ګڼونو څخه نه وي جوړ، ځکه چی د هر ګڼ سره د هغی په څڼ هم لري. n دې کوچنی طبیعی ګڼ وي، چی په A کی خوندي ده. د یوه په خوښه $a \in A$ لپاره باور لري

$$a = qn + r\,,\ \ 0 < r < n$$

نو دی.

$$r = a - qn \in A$$

او په دې لاس ته راوړني $r = 0$ (د n له ټاکنی څخه) ، دا په دې مانا چې $a = qn$ دی ، څه مو چی ښوول.

۳ . ۴ . ۶ جمله : هر د یوه ناپای څیوکلیکي ګروپ لاندېګروپ څیوکلیکي دی، او دا د پای څیوکلیکي ګروپ لپاره هم باور لري.

۳ . ۴ . ۷ تعریف : وایو، چی ګرپوئید G په ګرپو-ئید G' کی ایزومورف خوندې دی، او یا په G' کی ایزومورف نغښتی دی، که چیرې له G یوه ایزمورفه څیرونه د ګروپو-ئید G' په کوم یوه لاندېګروپوئید باندې موجود وي. دا کلیمه کړیو ته هم غزول کیدی شي،

هره کړی R، په کړی R باندې د پوره ماتریکسکړی R_n کی ایزومورف خوندې دی.
سکالار ماتریکسونه ، دا په دې مانا، چی د همغه توکي $a \in R$، چی په اصلي نیمي یا قطر کی پروت وي او نور د نیمي دواړو خواو ته صفرونه وي، په نامه R_n یو لاندېکړی، د R سره ایزمورف ده.

۳ . ۴ . ۷ جمله : هره کړی R په ورکړ شوي ډیري M باندې یوه پوره فنکشنکړی سره، چی ارزښت یي په R کی پروت دی ، ایزومورف دی.
د ټولو $x \in M$ لپاره هر فنکشن د همغه برابر ارزښت $a \in R$ سره، هغه و R سره ایزومورف فنکشنکړی راکوي.
د یوه په خوښه اسوشیاتیو، کموتاتیو کړی R کی پولینومکړی R[x] پوتنځلړیکړی R{x} کی ایزومورف خوندې دی.
پوتنځکړی د زیاتو پاي صفر څخه توپیریدونکو ځلوونو یا ضریبونو سره، یو و R[x] ته ایزومورف د R{x} لاندېکړی جوړوي.

یو لوي کار د لاندې جملي اوبی یا حل غواړي:

۳ . ۴ . ۹ جمله : هره کړی R په یوه کړی کی، چی یویتوکی لري، ایزومورف خوندي ده. که کړی R په دې برسیره اسوشیاتیو یا کموتاتیو وي، نو کیدی شي ، چی دا همداسی په یوه اسوشیاتیو، کموتاتیو دیویتوکي سره کړی کی خوندي شي.
اوبی یا ثبوت: موږ د ټولو جوړو (a,k) ډیری په نظر کي

نیسو، چې a ∈ R او k یو ټولګڼ دی او د دې جوړو لپاره د لاندې مساواتو له لارې زیاتون او ځل تعریفوو:

$$(a,k) + (b,l) = (a+b,k+l) \qquad (1)$$
$$(a,k)(b,l) = (ab+la+kb,kl) \qquad (2)$$

نسبت و زیاتون ته یو ابلګروپ لاس ته راځي. دا چې برسیره پر دې

$$[(a,k)+(b,l)](c,m) = (a+b,k+l)(c,m)$$
$$= ((a+b)c+m(a+b)+(k+l)c,(k+l)m$$
$$= (ac+ma+kc+bc+mb+lc,km+lm)\ m$$
$$= (ac+ma+kc,km)+(bc+mb+lc,lm)$$
$$= (a,k)(c,m)+(b,l)(c,m)$$

باور لري او ټیك په همدې ډول د دیستریبوتیو دوم قانون هم ښوولی شو، نو ډیری یوه کړی انځوروي. له (2) څخه وریسی لاس ته راځي

$$(a,k)(0,1) = (0,1)(a,k) = (a,k)$$

دا جوړه (0.1) په دې کړیکی د یویتوکي ځاي نیسی یا نمایندګي کوي. بر سیره پر دې د (1) او(2) سره سم لرو

$$(a,0)+(b,0) = (a+b,0)\ ,$$
$$(a,0)(b,0) = (ab,0)$$

د کومو سره ، چې د ټولو د (a,0) فورمجوړو ډیری د ټولو

جوړو (a,k) په کړی کی یو و R ته ایزومورف لاندېکړی جوړوي.
له دې سره د ثبوت لمړی برخه تکمیل ده، دومه برخه د (2)
استعمال سره په ساده توګه لاس ته راځي.
موږ دا په ګوته کوو، چی دا له موږ جوړه شوې کړی یواځنی
کړی نه ده (او همداسی هم نامینیماله کړی) د یویتوکي سره،

کوم چی یورکړه شوېکړی R (د ایزومورف خوندیونی په موخه)
خوندې لري، کیدی شي چی R پخپله یو یویتوکی ولري.

۳ . ۴ . ۱۰ جمله : هر ګروپوئید کیدی شي ، چی د
یوې کړی په ځلګروپوئید کی خوندي شي، یو اسوشیاتیو یا
کموتاتیو ګروپوئید کیدی شي، چی په یوه کړیکی، چی
همغه خویونه ولري خوندي شي.
د ثبوت لپاره ټول ممکن د زیاتون فورمولو زیاتون رانیسو

$$\sum_{a \in G} k_a a \qquad (3)$$

د کومو سره ، چی a د ورکړشوي ګروپوئید G ټولو توکو
کی ځغلی، په داسی حال کی چی ځلووني یاضریبونه k_a
ټولګڼونه دي او په رینښتونی، داسی چی زیات ترزیات پای
ډیر د صفر څخه توپیري رامنځ ته کیږي د زیاتون (3)
زیاتون او ځل د برابرونونو یا مساواتو

$$\sum_{a\in G} k_a a + \sum_{a\in G} l_a a = \sum_{a\in G} (k_a + l_a)a \qquad (4)$$

$$\sum_{a\in G} k_a a \cdot \sum_{a\in G} l_b b = \sum_{c\in G} m_c c \qquad (5)$$

سره روښانه یا تشریح دی، په کومو کې، چې m_c د ټولو صفر څخه توپیر ځلونو $k_a\, l_a$ زیاتون په مانا دی، چې په ټولو a او b کې ځغلیدلی وي، د $ab = c$ سره. روښانه ده، چې د برابرونونو ښی لور (4) او (5) د (3) فورم زیاتون انځوروي. مساوات (5) وایي، چې په کیڼ لور، د فاکتورونو په څیر رامنځ ته شوي، پاي زیاتونونه د غړو په څیر پو له بل سره ځلیږي، او په رینښتونی د قانون

$$k_a a . l_a b = (k_a l_a)(ab)$$

لاندې، چې د ab سره د ګروپوئید په موخه ورکړ شوې عملیه مو مطلب دی، د کومو سره چې د ځل ab رامنځ ته کیدو سره همغه توکی c ورکوي، سره یوځاي راټول شي.

د زیاتون لپاره په هره توګه یو ابلګروپ لاس ته راځي. د دیستریبوتیو قانو او د هغه ثبوت چې د G په ګروپ کی د ځل اسوځیاتیو همداسی کموتاتیو قانون او همغه مساوي یي

د زیاتونونو ځل، چې فورم (3) لري لاس ته راځي، که څه هم خورا پراخ دی، مګر په پرینځیپ یا اصولوکی ستونځې نه رامنځ ته کوي، د هغو پرمخ بیول دې د لوستونکو دنده وي.

د ټول زیاتون، چې فورم (3) لري له دې امله نسبت و(4) او (5) مساواتو تعریف شوو اپریشن ته یوه کړی جوړوي، هغه زیاتون (3) په کومو کې ، چې $k_a = 1$ دی، د په خوښه a لپاره، چې له G دی. د (5) پسی یو ګروپ G سره ایزومورف لاندېګروپوئید، د دې کړی د ځلوونکي ګروپوئید سره، جوړوي. له دې سره دا ښونه سر ته ورسیده.

دا له مورږ جوړ شوې د ګروپوئید G کړی د ټولګڼونو ګروپو-ئیدکړی بلل کیږي.
که G یو نیمګروپ وي او یا ګروپ، ~~نو د~~ نو د دې په ځای د ټولګڼیزنیمګروپ او همداسی د ټولګڼیزګروپ څخه غږیږو.

۳ . ۴ . ۱۱ جمله: هر ګروپ د یوه ډیري M په سیو-متري ګروپ کی ایزومورف خوندي دی، کیدی شي، چې د M په ځای په ځانګړې توګه د ګروپ ټولو توکو ډیری وکارول شي.
دلته د ګروپ G هر توکی a هغه ترانسفورمیشن باندې تنظیمو، چې یو د G توکی x په توکي xa باندې تنظیم

کړي. دا چي له $x \neq y$ څخه هم $ax \neq ay$ لاس ته راځي
او برسیره پر دې د هر $x \in G$ لپاره برابرون

$$(xa^{-1})a = x$$

رامنځ ته کیږي، ترانسفورمیشن $x \to xa$ گروپ G په ځان
په ځتې یواځنی ځیره کوی یا تنظیموي، دا نو له دې امله یو
پرموتیشن (پرموتیشن ځما د شمیرپوهنه کتاب کی په پراخه
توگه روښانه شوی دی) دی. د $a \neq b$ لپاره په دې برسیره
په دې د غوښتونکو پرموتیشنونو توکي یو له بل توپیر لرود-
ونکی دي، ځکه، چی $1.a \neq 1.b$ دی.
بالاخره برابرون

$$(xa)b = x(ab)$$

په گوته کوي، چی د ab پورې اړونده پرموتیشن د a او b
پورې اړونده یوبه بل پسی راوړنو څخه لاس ته راځي.

۳ . ۴ . ۱۲ جمله : هر نیمگروپ G ، د یوه ډیري M
سیومتري نیمگروپ کی خوندي دی.
اوبی یا حل: د ثبوپ لپاره نیمگروپ G د ۳ . ۴ ، ۱۰
سره سم په یوه، د یوه اسوڅیاتیو کړی R, په ځلیز گروپ

کی خوندي کوو، دا بیرته د ۳ . ۴ ، ۹ سره سم په یوه اسوشیاتویکړی R کی د یویتوکي سره خوندي کوو او د G سره یی په نخښه کوو، چی داد اخرنی کړی ځلیزه نیمګروپ دی. لکه څنګه، چی په G کی هم یو توکی 1 د 1.a |= 1.b سره له a |= b څخه موجود دی، نو د لغاتو پوري د پورته جملی ثبوت سره دا سر خوري ، چی دا نیمګروپ G د نیمګروپ سره پخپله، په دې ډیرګ G باندي، ایزومورف خوندي دی. له دې څخه د سرچینیز ګروپ G خوندیونه لاس ته راځي.
مورږ غواړو، چی دې ته ګوته ونیسو، چی د یوه ګروپوئید (په ځانګړي توګه یو ه نیمګروپ) په بل ګروپوئید (یوه نیمګروپ) کي خوندیونه سیده وښایو، بی له دې، چی یوه کړی د یویتوکی سره وکاروو.

۳ . ۵ د نیمګرپونو په ګروپ کی او کړی په یوه (ناضرورکموتاتیو) تن یا بدن کی خوندیونه

هر نیمګروپ، ضرورپه یوه ګروپ کی، ایزومورفف نه شی خوندي کیدی، د دې لپاره ضروري شرطونه هغه باید ورسره بلد د لنډونی قاعدې دي.

۳ . ۵ . ۱ جمله: له $ac = bc$ او همداسی $ca = cb$ څخه لاس ته راځي $a = b$.

یادونه : دلته ګورو، چی د لنډونی قاعدې کارول شوي دي.

په لاندې برخه کی غواړو وښایو، دا راوړلشوي ضروري شر- طونه، چی د نیمګروپونو په ګروپونو همداسی د اسوشیاتیو کړی په یوه (ناسو[۸] کموتایتو) بدن کی د کموتایتو په حالت کی پوره کیدونکي هم دي.د دې لپاره د لاندې مرستندوي جملي په ښوونه پیل کوو.

۳ . ۵ . ۲ مرستندوي جمله: د ابل په یوه نیمګروپ G کی دې یو لاندې نیمګروپ S ورکړ شوی وي، او په G کی دې د S د توکو سره لنډونه وشي، دا په دې مانا، چی له

$$ax = bx \ , \ x \in S; \ a,b \in G$$

څخه دې تل $a = b$ لاس ته راشی. نو کیدی شي، چی G د ابل نیمګروپ ایزومورف په یوه داسی ابل ګروپ G کی د یویتوکي سره ، ایزومورف خوندې شي، چی د S هر توکی په G کی یو په څټ توکی ولري.

(۸) ناځوځي دکموتایتو

یادونه : د دې جملی له ثبوت څخه تیریږو. دا د الجبر په درسی کتابونو کی کتل کیدی شي،

پِه دې پورته غوښتنو له مخی لاندې جمله لاس ته راځي

۳ . ۵ . ۳ جمله : هر ابل گروپ د لنډونو قاعدو سره په یوه ابل گروپ کي خوندې کیدی شي .
د دې ورکړ شوي جوړښت د طبیعي ګڼونو په یوه زیاتون نیمگروپ ، کوم چی د لنډونو قاعدو سره یو ابل نیمگر-وپ دی ، په ساده توګه د ټولګڼونو په زیاتونګروپ کی میندل کیدی شي ،

۳ . ۵ . ۴ جمله: په یوه اسوشیاتیو – کموتاتیو کړی R کی دې د توکو یو ډیری N راوستل شوی وي، په کوم کي چی صفر او پرصفرویشنه نه وي موجود. نو کیدی شي، چی کړی R ایزومورف په یوه اسوشیاتیو-کموتایتو کړی R کی، د یویتوکي سره، داسي خوندي شي، چی د N هر توکي په R کی یوه په څټ توکی ولري.

یادونه : دا ثبوت هم پریږدو او په دې توګه نورو غوښتنو ته هم پاي ورکوو، چی موضوع اوږده نه شي.

۳ . ۶ نورمالپرویشونی

۳ . ۶ . ۱ تعریف : یو ګروپ G او په هغه کی دې توګه یو لاندیګروپ H دې ورکړ شـوي وي. که یوه a د G په خوښه توکی وي، نو ممکنه ځلونی ah چی د aH ټولګه ده ، چیرته چی h په لاندې ګروپ H کی ځغلي، دا د a تعریف شوې، د ګروپ G کیڼ اړخیزځنګ-ټولګی یا ګاونډی ټولګی(موږ به کوښښ وکړو چی دا تل ګاونډیټولګی وبولو) بلل کیږي و لاندې ګروپ H پسی. په څرګنده توګه a ∈ aH دی، ځکه چی لاندیګروپ H یویتوکی لري.

د یوه توکی b لپاره دې، چی د ګاونډیټولګی aH څخه دی، تل باور ولري bH = aH ، دا داسی بللکیږي، چی د ګروپي G هر کیڼ اړخیز ګاونډیټولګی و H پسی د هغه د هر توکی سره تعریفیږي. که b = aH , h ∈H باور ولري، نو د په خوښه h',h" ∈ H لپاره باور لري:

$$bh' = a(hh') \quad \text{او} \quad a h'' = b(hh'')$$

پس $aH \subseteq bH$ او $bH \subseteq aH$

.

په دې سره هر دوه کينې اړخيز ګاونډيتوب‌لګي، يو د بل سره کټمټ دي او يا يې غوڅې تشډيرې دي.
موږ ددې سره د ګروپ G يوه ټوټونه يا تجزيه لاس ته راوړو، په لانډګروپ H پسې، چې د يوه مخه يې کينې اړخيزو ګاونډيتوب‌لګيو يو له بل څخه پردې دي، دا ګروپ G کينې اړخيزه ټوټونه بلل کيږي په يوه لانډګروپ H پسې. د دې ټوټوونو ياتجزيې يو ټولګې پخپله H دې: د $a \in H$ سره باور لري $aH = H$.

په ورته توګه د ګروپ G ښې اړخيزه ټوټونه يا تجزيه لاس ته راوړې شو، په يوه لانډګروپ H پسې، کوم چې له ښې اړخيز ګانډيتوب‌لګې $ha , a \in G$ څخه جوړدې، که يو ګروپ کموتاتيو نه وي، نو کيدې شي، چې کينې ګاونډيتو-لګي او ښې ګاونډې ټولګې باندې د يوه ګروپ G ټوټونه د لانډګروپ H پسې يو له بل توپير ولري. په هر صورت دواړه ټوټونې د ټولګيو برابر ګڼون لري: ځيرونه چې د G هرتوکې a د G په a^{-1} توکې ځيره کوي، په څټکيدو-نکې يواځنې ځيرونه ده، د ګروپ G په خپل ځان او کينې اړخيز aH ګاونډيتوب‌لګې په همغه ورته ښې اړخيز ګانډيتو-لګي Ha^{-1} ځيره کوي او په څټ.

۳ . ۶ . ۳ تعریف: د ګروپ G ټوټونه په لاندېګروپ H پسي ، د ګاونډيو ټولګيو ګڼون په دې دواړو هر ټوټونو یا تجزیه کی ، که دا پاي وي، د لاندې ګروپ پیژند نخښه یا ایندکس Index، په ګروپ G کی بلل کیږي.

ګروپ G دې د n نظم پاي ګروپ وي او H دې د هغه لاندېګروپ وي، د k نظم او j پیژند نخښی یا ایندکس سره. هرګاونډټولګي aH د ټیك k توکو څخه جوړ دی او له دې امه باور ولري

$$n = k.j$$

له دې څخه لاندې جمله لاس ته راځی

۳ . ۶ . ۳ د لاګرانژ Lagramge جمله: د یوه په خوښه پای لاندېګروپ نظم او پیژندنخښه د ټول ګروپ د نظم پرویشوني دي.

دا جمله د ۳ . ۳ . ۴ سره سم لاس ته رکوي ، چی د پاي ګروپ د هر په خوښه توکی نظم همداسی د ګروپ نظم ویشي. د دې جملی بله پسی راتلنه ده:

۳ . ۶ . ۴ پسی راتلنه: هر د لمړي ګڼ نظم(لمړیګن هغه ګڼ دی ، چی پرویشوني یی ساده پرویشوني وي، یعنی پخپله دا ګروپ او یویتوکی) څیوکلیك یا په بل نوم، راګرځیدونکی دی.
دا باید د په خوښه د هغه توکي جوړه څیوکلیکي لاندی ګروپ سره سر وخوري، تر هغي چی دا توکی له ۱ څخه توپیر ولري.

۳ . ۶ . ۵ تعریف: یو لاندښنیمګروپ H د ګروپ G نورمالپرویشونی Nrmalteiler (یا اینواریانتي invariante Untergrupp لاندېګروپ) بلل کیږي، که د G کینې اړخیزه ټوټونه یا تجزیه د ښی خوا ټوټونی سره، نسبت و H ته، سر وخوري، دا په دې مانا، چی د هر a ∈ G لپاره (په G کی د دواړو برخېیریو یو بل سره د سر په سر خوړلو په موخه وي) مساوات

$$a\,H = H\,a \qquad (1)$$

رامنځ ته کیږي. یا باوري کیږي. کیدی شي چی د لته د ګروپ G ټوټونی و H پسی د نورمالګروپ څخه وغږیږو.
په لاندې کی د نورمالپرویشونی یو بل تعریف ورکوو، چی

دې همدا اوس ورکړشوي تعریف سره برابرارزښته دی.

۳ . ۶ . ۶ تعریف : په ګروپ G کی توکی x او y یو د بل سره کونجوګیري konjugiert **بلل کیږي**، که په G کی یو توکی a داسی پیداکیدي شي ، چی باور ولري

$$y = a^{-1}xa$$

داسی هم ویل کیږي، چی له y څخه د x سره ، د a ترانفورمیشن له لارې لاس ته راځي.

۳ . ۶ . ۷ جمله : د ګروپ G لاندې ګروپ H هلته او هلته په G کی نور مالپرویشونی دی، که H وهر توکی ته دده توکی په G کي ټول کونجوګیري توکی هم ولري.

اوبی : د دې لپاره دې H په G کی نورمالپرویشونی وي، او په ورزیات دې یا برسیره پر دې دې h د H په خوښه توکی وي. a دې د G یو په خوښه توکی وي، په H کی د (۱) پسی یا د (۱) له مخی یو توکی 'h د

$$ah' = ha \qquad (2)$$

سره موجود دی. پس دی

$$a^{-1}ha = h' \in H \qquad (3)$$

او په څټ که د $h \in H$ په خوښه توکی لپاره او $a \in G$ په H کی یو توکي h' موجود وي، کوم چی برابرون (۳) پوره کړي او د دې پسی یا د دې په تعقیب(۲) پوره کړي، نو باور لري $aH \subseteq Ha$. که په دې رامنځ ته شوې اړیکی، چی د ټولو a لپاره رامنځ ته شوي یا باور لري، د a په ځای a^{-1} ولیکي ، نو و $a^{-1}H \subseteq Ha^{-1}$ ته راځي او همداسی $Ha \subseteq aH$.کوم چی د مخ ته تیر سره برابرون (۱) ورکوي.

۳ . ۶ . ۸ تعریف : دوه لاندېګروپونه U اوV په G کی یو د بل سره کونجوګیرkonjugiert **بلل کیږي**، که یو داسی توکی $a \in G$ موجود وي، چی د هغه سره د ترانسفورمیشن له لارې لاندېګروپ U په لاندېګروپ V پریباسي، یعنی باور ولري

$$a^{-1}Ua = V$$

ډیري $a^{-1}Ua$ بی له دې هم د هر $a \in G$ لپاره د په خوښه یو (په ریښتونی U سره ایزومورف) لاندېګروپ سره تل بیرته یو لاندې ګروپ دی.

د په خوښه توکو $u_1, u_2 \in U$ لپاره لاندې اړیکی رامنځ ته کیږي

$$(a^{-1}u_1a)(a^{-1}u_2a) = a^{-1}(u_1u_2)a$$

او له

$$a^{-1}u_1a = a^{-1}u_2a$$

څخه برسیره پردي لاس ته راځي $u_1 = u_2$ ، د کوم سره چی څیرونه یا نظم $u \rightarrow a^{-1}ua$ د $u \in U$ سره، یو ایزومورف څیرونه دU په $a^{-1}Ua$ ده: aUa هم یو لاندېګروپ انځوروي.

۳ . ۶ . ۹ جمله :د یوه ګروپ G هر نورمالپرویشونی د ټولو خپلو په G کی کونجوګیر لاندېګرپونو سره یوځای پریوزی. په څټ: د ګروپ G یولاندې ګروپ H ټولي و H ته په G کی کونجوګیر لاندېګروپونه خوندي لري، نو له دې امله دا نوګمالپرویشونی دی.
له (۱) څخه په لمړی وار لاس ته راځي

$$a^{-1}Ha = H \qquad (4)$$

کوم چی د جملی لمړی برخه ثبوتوي. اوس نو باور لري

$$a^{-1}Ha \subset H$$

د اصلي خونديلرنی په موخه. دا رات راکوي

$$H \subset aHa = (a^{-1})^{-1}Ha^{-1}$$

او د H لاندې ګروپ باید، که هغه ټولی و هغی ته کونجو-
ګیر خوندي ولري، د دې توافق یا یو په بل سرخوړنی سره .
د په خوښه توکي $a \in G$ لپاره له دې امله (۴) رامنځ ته
کیږي، له کوم چی (۱) رابیلیدلی شي.

۳ . ۶ . ۱۰ جمله: د یوه ګروپ G د په خوښه نومالپرو-
یشونو ډیریو غوڅی ، بیرته نومال پرویشونی دي.

اوبی : که D د $i \in I$, A_i غوڅی وي ، نو په هرترتیب D
د G لاندې ګروپ انځوروي. (پرتله ۳ . ۳ . ۶) برسیره پر
دې د هر توکی ، چی یوه د D توکي سره کونجوګیر وي،
په ټولو A_i کی پروت دی او په دې پسی لاس ته راځي، چی
په غوڅ کی هم پروت دی.

۳ . ۶ . ۱۱ جمله :د یوه ګروپ G په خوښه نورمالپرو-
یشونو سیستم څخه تولید یا راپیداشوي لاندېګروپ(پرتله
۲ . ۳ . ۸) په همدې حالت کی د G یو نومرمالپرویشونی
دی

ورکړ شوی دي نورمالپرویشونی $A_i \,,\, i \in I$ وي او د هغه څخه جوړ شوي یا تولید شوی د لاندې ګروپ B وی لکه په ۳ . ۳ . ۷ کی ښوول شوي وو، هر د B توکی b په لاندې بڼه لیکل کیدی شي

$$b = a_1 a_2 \ldots a_n$$

د ورکړ شوي $a_j \in A_j \,,\, j = 1,2,\ldots,n$ سره . له G څخه په خوښه توکي g لپاره باور لري

$$g^{-1}bg = (g^{-1}a_1 g)(g^{-1}a_2 g)\ldots(g^{-1}a_n g)$$

او دا چی

$$g^{-1}a_j g \in A_j \quad , j=1,2,\ldots,n$$

دی ، نو لاس ته راځي

$$g^{-1}bg \in B$$

۶ . د ابلګروپ ټول لاندې ګروپونه د هغی خپل نورمالپر–ویشونی دي. په دې ورزیات یا برسیره پر دې په هر ګروپ G کی یوونګروپ E د نورمالپرویشونی په څیر موجود دی او په همدې توګه پخپله ګروپ G هم.

۳ . ۱۲.۶ تعريف : يو ګروپ ، چی نورمال پرويشونی يی يواځی يوونګروپ او پخپله خپل ځان وي، ساده بلل کيږي.

۳ . ۱۳.۶ جمله : يواځني ساده ابل ګروپونه، هغه ځيو– کليکي ګروپونه دي، چی نظم يی پريمګڼ يا لمړی ګڼ وي.

اوبی : که يو ابل – يا کموتاتيو ګروپ ساده وي، نودا بيخي ناساده يا نااصلي لاندې ګروپ نه لري: دا چی په دې کي ځيوکليکي لاندې ګرپونه بايد خوندې وي، نو دا پخپله ځيوکليکي دی. يو ناپاي ځيوکليکي لاندې ګروپ نااصلي يا ساده لاندېګروپونه لري، په کوم چی د ټولګڼونو زياتون– ګروپ دی ، په هغه کي چی د جفت ګڼونو ګروپ په ځان کی دننه يا خوندي لري. که يو پای ځيوکليکي ګروپ G = {a} راواخلو چی نظم يی n دی، نو د ټوټونی n له لارې ځخه لرو n = kl ، چی لاندې ګروپ {a^k} نظم l او په دې لاس ته راوړنی سره د E او G ځخه توپير لري.
د دې په ځټ: ګروپ G={a} کيدی شي چی هيڅ ناساده لاندېګروپ ولري، که نظم يی يو پريمګڼ يا لمړی ګڼ وي. چی د لاګرانژ له جملی ځخه ساده په لاس راتلی شي.

یادونه: دا موضوع دلته رالنډوم او داسی نور ې په دې هکله موضوعګانې په خارجي ژبو درسی کتابونو کی شته، چی هلته کتل کیدی شي، دلته به زیات وخت او ځای ونیسی. زما هئله هم دا ده، چی د زیاتو شیانو سره په دا لمړي کی داسی لږ غوندې بلد شو.

۳ . ۷ ایدیال او پاتي ټولګیکړی

Ideal und Restklassenring

یادونه: ی ما دا پاتیټولګیکړی بللی، چی یو نوم وي، خو دا کیدی شي، چی د پاتیټولګی کړی هم وبلل شي. د نومونو په هکله ستونځي به منو، تر څو، چی ځمونږ په هیواد کي شمیرپوهنی خپله لار نیولي وي.

په دې برخه کی ګورو، چی د نورمالپرویشونی په ځای د ایدیال کلیمه رامنځ ته کیږي.
په دې برخه کي R تل یوه کموتاتیوه کړی د یوښتوکی ۱ سره په نخښه کوي یا ښايي. اوس د یوې کړی د « ایدیال»کلیمه پیل کیږي. لاس ته راځی، چی د R هر ایدیال Y په R باندې

یو ایکویوالنت یا ورته ټولګی ~ تعریفوي. د دې سره ښوول کیږي، چی د هر r ∈ R کړیتوکی اړونده ایکویوالنتټولګي [r] بیرته یوه کړی R / Y جوړوي.

۳ . ۷ . ۱ تعریف : د کړی R یو ناتش برخټیړی Y یو ایدایال دی، که Y د زیاتونګروپ (R , +) یو لاندې ګروپ وي او د ټولو y ∈ Y او r ∈ R لپاره باور ولري yr ∈ Y .
دا د R ایدیال Y اصلي ایدایل بلل کیږي که R =| Y وي .

۳ . ۷ . ۲ بیلګی:

الف) دا د R یواځي د صفرتوکی څخه جوړ برخټیری { 0 } د R یو ایدیال دی، دا صفرایدیال دی او له همدا اوسه به په 0 سره په نخښه شي.

ب) که R = Z د ټولګښونو کړی وي، نو ډیری Y د ټولو جوړه ګڼونو Y = 2z د z ∈ Z سره جوړ ډیری د Z یو ایدیال دی. د دوه جوړه ګڼونو زیاتون او کمون تل یو جوړه ګڼ دی، او برسیره پر دې yz د ټولو y ∈ Y لپاره او د ټولو z ∈ Z لپاره یو جوړه ګڼ دی.

پ) که $R = F$ یو بدن وي، نو 0 او F د R یواځنی ایدیالونه دي.

۳ . ۷ . ۳ تعریف: د R یو ایدیال Y اصلي ایدیال بلل کیږي، که $Y = yR$ وي، د یوه $y \in Y$ لپاره، دا په دې مانا چې یو $y \in Y$ داسې موجود دی، چې د هر $z \in R$ لپاره یو $r \in R$ د $z = ry$ سره موجود وي. داسې هم ویل کیدی شي: چې دا توکی y ایدیال Y جوړوي یا تولیدوي او یا y د Y جوړوونکي یا تولیدوونکی دی.

۳ . ۷ . ۴ تعریف: Y دې د R یو ایدیال وي. نو دوه توکی $r, s \in R$ و Y ته ایکویوالنت یا ورته بلل کیږي، که باور ولري: $r - s \in Y$

په نخښوونه یی: $r \sim s$ یا $s \sim r$.

دا په ساده توګه لیدل کیږي، چې $\sim$ په R باندې یو ایکوبوالنځ اړیکه یا ورته اړیکه ده.

۳ . ۷ . ۵ مرستندوي جمله: Y دې د R یو ایدیال وي د $R \models Y$ سره او R / Y دې د R له توکو r څخه جوړ، د ورته ټولګیو $[r] = \{ s \in R \mid s \sim r \}$ ډیری وي.

نو R / Y به د زیاتون $[r_1] + [r_2]$ او ځل $[r_1] . [r_2]$
سره د ټولو $r_1 , r_2 \in R$ لپاره یوه کړی وي د یوې توکی
[1] سره .
اوبی: لکه د مخه مو چی ګوته ورته ونیوله ورته ټولګی
$[r] , r \in R$ ډیری R په پردیو برخډیریو باندې ټوټه یا
تجزیه کوي. وي دې

$$[r_1] , [r_2] \in R / Y ,$$

نو دا باید وښوول شي، چی زیاتون

$$[r_1] + [r_2] = [r_1 + r_2]$$

او ځل

$$[r_1] . [r_2] = [r_1 . r_2]$$

د هغو د نماینده توکو څخه خپلواك ایکیوالنځټولګي یا
ورته ټولګي دي. که $s_1 , s_2 \in R$ نور د ټولګي $[r_1]$ او
همدا ډول د ټولګی $[r_2]$ نماینده ګان وي نو $r - s = y \in Y$
هم دي، د ټولو $i = 1 , 2$ لپاره، د کوم څخه چی لومړی

$$[r_1 + r_2] - [s_1 + s_2] = [r_1 + r_2 - s_1 - s_2] =$$
$$=[(r_1 - s_1) + (r_2 - s_2)]$$
$$=[y_1 - y_2] = [0] \in R / Y$$

لاس ته راځي. له دې امله زياتون + کره تعريف دی او [0] د ابل د ګروپ R / Y يو صفرتوکی دی و ترڼی يا نښلونی يا عمليي + ته.

په R / Y باندې ځل . هم کره تعريف دی ځکه چی

$$r_1r_2 - s_1s_2 = (s_1 + y_1)(s_2 + y_2) - s_1s_2$$
$$= s_1s_2 + y_1s_2 + s_1y_2 + y_1y_2 - s_1s_2$$
$$= y_1s_2 + s_1y_2 + y_1y_2 \in Y$$

له کوم چی $[r_1] [r_2] = [r_1r_2] = [s_1s_2] = [s_1] [s_2]$ لاس ته راځي. سړی په دې پسی تړلی په دې باور راوړی شي، چی R / Y (د کړی د تعريف سره سم) يوه کړی ده د يوي توکی [1] سره.

۳ . ۷ . ۶ تعريف : دا کړی R / Y د R يو د پاتی– ټولګيو کړی و ايډيال Y ته بلل کيږي.

۳ . ۷ . ۷ تعريف : د کړی R يو ايديال M ماکزيمال ايديال بلل کيږي، که $M \neq R$ باور ولري او Y،د R يو بل ايديال، موجود نه وي د $M \subset Y \subset R$ سره.

۳ . ۷ . ۸ جمله: R دې يوه کموتاتيوه کړی وي،

د $1 \in R$ سره، نو باور لري:

الف) د R هر اصلي ایدال Y په یوه ماکزیمال ایدیال کي خوندي دی.
ب) که M د R یو ماکزیمال ایدیال وي، نو د پاتیټولګی کړی $F = R/Y$ یو بدن یا تن دی.

اوبې:
الف) دا چې Y د R یو اصلي ایدیال دی، نو $1 \notin Y$ دی.

$$Y \subseteq y_1 \subseteq y_2 \subseteq \dots \subseteq Y$$

دې د کړی R د ایدیالونو Y_i یو جګیدونکی ځنځیر وي د $1 \notin Y_i$ سره.، چیرته چي $i \in I$ او I یو اندکس ډیری یا پیژندډیری دی. وي دې $W = \bigcup_{i \in I} Y_i$ ، نو $u, v \in W$، د $i \in I$ سره موجود دی د $u, v \in Y_i$ سره، ځکه چی ایدیال Y_i یو ځنځیر جوړوي. نو لرو $u - v \in Y_i \subseteq W$، همدا ډول $ur \in W$ لاس ته راځي، د ټولو $u \in W$ لپاره او $r \in R$. له دې امله W د R یو ایدیال دی، او $1 \notin W$ دی. نود کړی R د ټولو Z ایدیالونو ډیری M د $Y \subseteq Z$ سره، او $1 \notin Z$ سره، د ځورن لیما پسی یو ماکزیمالتوکی M لري. داچی هر اصلي لوي ایدیال $M' > M$ دا یویتوکي 1

.

لري او له دې امله $R = M'$ باور لري، نو لاس ته ترې اځي ،
چې M د R يو ماكزيمال ايديال دی. دا Y خوندي لري.
ب) وي دې $[r] \neq [0]$. نو $M + rR$ د R يو ايديال دی،
كوم چې M اصلي خوندې لري. دا چې M د R يو
ماكزيمال ايديال دی، نو باور لري

$$R = M + rR$$

پس د R يوی په $M + rR$ كې پروت دی، دا په دې مانا
چې $1 = m + rs$ د توكو $m \in M$ او $s \in R$ لپاره باور لري.
له دې امله $[r][s] = [1] \in R/M$ دی.
او له دې سره $[s] = [r]^{-1}$ دی.
نو پاتې ټولگې كړې يو بدن يا تن دی. ځ چ د ښ و

۳ . ۷ . ۹ بيلگې

اول : د ټولگښونو Z په كړې كې Y د ټولو جفتو گڼونو ډيرى
ماكزيمال ايديال دی. پاتيټولگي بدن Z/Y يې د دواړو
پاتيټولگيو $[0]$ او $[1]$ څخه جوړ دی. دا نو له دې امله
دوه توكې لري او د $Z/2Z$ سره په نخښه كيږي.
دوم : په پولينومكړې $R = F[X]$ كې په بدن يا تن F باندې
د نا ټاكلي يا مجهولي X سره $Y = \{ X f(X) \mid f(X) \in R \}$

یو ماکزیمال ایدیال دی د پاتی ټولګیتن $R / Y \sim F$ سره د
مخ ته تیر تعریف له مخی، ځکه چی دی

$$f(X) = f_0 + f_1X + \dots + f_nX^n \in R$$

نو $[f(X)] = [f]$ په R / Y کي پروت دی. د مرستندوي
جملی۳ . ۷ . ۵ له مخی دا ښیرونه $[f_0] \to f_0 \in F$ د بدنونو
یا تنونو R / Y او F ترمنځ یو ایزومورفیزم دی.

۳ . ۷ . ۱۰ تعریف: د کموتاتیو کړی R د یویتوکي 1
سره یو توکي u یوون بلل کیږي، که یو $v \in R$ ځخه
موجود وي د $uv = 1$ سره.

۳ . ۷ . ۱۱ جمله : د یوه توکي $u \in R$ لاندې خویونه
ایکویوالنت یا ورته دي

الف) u د R یو یوون دی

ب) R د u ځخه جوړ شوی یا تولید شوی اصلي ایدیال
دی ، دا په دې مانا چی $uR = R$.

پ) u د R په هیڅ ماکزیما ایدیال کي خوندي دی یا په
بل ډول : په کوم ماکزیمال ایدیالکی خوندي نه دی).

ثبوت یا اوبی: پ) په ساده توګه له ب) څخه لاس ته راځی. که u د R په کوم ماکزیمال ایدیال کی خوندې نه وي، نو د جملي ۳ . ۷ . ۸ له مخی اصلي ایدیال نه دی.
پس لرو $R = uR$ او $1 = uv$ د یو $v \in R$ لپاره، که چیرې الف ښوول شوی وي. دا ایمپلیکیشن $(b) \Leftarrow (a)$ ساده دی.
(څه چی د ښوولو وو) ځ چ ښ و

۳ . ۷ . ۱۲ تعریف: د کړی R یو ناتش برخه‌یری U لاندېکړی بلل کیږي، که د ټولو $u_1, u_2 \in U$ لپاره هم $u_1 - u_2 \in U$ او هم $u_1 u_2 \in R$ باور ولري.

۳ . ۷ . ۱۳ بیلګي:

الف) د R هر ایدیال Y د R یو لاندې کړی ده.

ب) Z د Q یو لاندېګروپ دی، مګر د Q ایدیال نه دی.

پ) د Z د ټولو جفتو ګڼونو ډیری Y د Z لاندې کړی ده. په ځانګړې توګه دا Y داسی لاندې کړی ده، کومه چی یویتوکی نه لري.

دا چی په ټولیزه توګه یوه لاندېکړی U یویتوکی نه لري،
نو ضرور دا ده چی د لاندیکړی د «ایدیال» کلیمه رامنځ
ته کړو.

۳ . ۷ . ۱۴ تعریف : U دې د R یوه لاندې کړی وي.
د U دا ناتشهیری Y د لاندې کړی U یو ایدیال دی، که د
ټولو $y_1 , y_2 \in Y$ لپاره $y_1 - y_2 \in Y$ وي او که $yu \in Y$ د
ټولو $y \in Y$ او ټولو $u \in U$ لپاره باور ولري.

۳ . ۷ . ۱۵ لاسته راوړنی: U دې د R یوه لاندېکړی
وي او Y دې د کړی R یو ایدیال وي. نو باور لري:

الف) $Y_1 = U \cap Y$ د U یو ایدیال دی

ب) $U + Y = \{ r \in R \mid r = u + r$
د ټولو $u \in U$ او یوه $y \in Y$ لپاره$\}$
یوه د لاندېکړی ده.

پ) $(U + Y) / Y$ د پاتیټولګیکړی R / Y ، لاندېکړی ده.

ت) د R / Y د هر لاندېکړی T لپاره

$$T^{-} = \{ r \in R \mid r[r] \in T \}$$

د R لاندې کړی ده.

ټ) د R / Y د هر ایدیال I لپاره

$$I^{-} = \{ r \in R \mid [r] \in I \}$$

د R یو ایدیال دی، د $Y \subseteq I^{-}$ او $I^{-} / Y = I$ سره.

اوبې: الف) د تعریف ۳ . ۷ . ۱۲ او تعریف ۳ . ۷ . ۱۴
څخه ترلې لاس ته راځي

ب) $r_1 = u_1 + y_1 ,\ r_2 = u_2 + y_2 \in U + Y$ دي،

د $u \in U$ او $y \in Y$ سره، نو لرو

$$r_1 - r_2 = (u_1 - u_2) - (y_1 - y_2) \in U + Y$$

دا چې Y د R یو ایدیال دی نو دا لاندې هم لرو:

$$r_1 \cdot r_2 = (u_1 + y_1)(u_2 + y_2)$$
$$= u_1u_2 + (y_1u_2 + u_1y_2 + y_1y_2) \in U + Y$$

دا نورې ساده د پ) ، ت) او ټ) اوبیونی د کورکار دي.

۴ د بول الجبر ، سرکیټ الجبر

۴ . ۱ د بول د الجبر ستڼکلیمی

په برخه ۱ کی مو د ډیري M برخډیریو ترمنځ تړونونه یا عملی ولوستلی. په دې عملیو کی، که چیرته د ډیري M برخډیریو ترمنځ دوه ځایز اپریشنونه یا کارونی (د ډیریو تړنی) غوڅی ، ټولنه او همداسی کمپلیمنت جوړونه په پوتنڅ یا توانډیري باندې یوه «جوړښت» ته سره راټولگه کړي، نو هغه «جوړښت» چی لاس ته راځي، د ډیري M د برخډیریو بول الجبر بلل کیږي. په دې جوړښت کی تشډیری Ø او ټولډیری M یو راوتلی یا کره راوتلی رول لوبوي. د تړونو لپاره مو د مخه په برخه ۱ کی یوه لړی شمیرقوانین کره کړل او په لیست کی مو راوستل.دا ډول شمیرنی د پوره بل ډول شمیرپوهنیزو شیانو لپاره هم باور لري یا کارول کیږي. دا ګټور دي، چی دا ډول شمیرقاعدې لمړی په دې لاس ته راغلی پرپریکندنی یا پریکړي یا لاس ته راغلي نتیجی په عمومی توګه تر څیړنی لاندې ونیول شي. « ټولیز» دلته په دې مانا

دی، چی د عملي په ډول نه پیچوُبلکه په هغو توکو، د کومو لپاره چي دا عملیي باور لري. له دې څخه مخ ته ځو، چی د شیا ټنو یو ډیری مو مخ ته پروت دی د کومو لپاره چي عملیی روښانه یا تشریح دی یا کره شوي دي(یعنی چی یو بل سره « تړلکیدی» شي، د کومو سره چی شمیرنه ممکن وي)، او د دې عملیو سره شمیرنی له لارې، هغه تر څیړنی لاندې نیولي شمیرقوانین باور ولري. له دې څخه په فورمال توگه لاندې تعریف لاس ته راځي. دلته یو دوه ځایزه عملیه یا کارونه یا اپریشن یو تړون یا تړنه ده یو «شمیرقاعده» ده د کوم له مخی، چی له دوه توکو څخه یو دریم توکی لاس ته راځي. (د بیلگي په توگه په گڼونو کي زیاتون یا ځل). یو یوځایزه عملیه له هر توکی څخه یو ټاکلی بل توکی جوړوي (لکه مربع یا د کوم گڼ ریښه یا بهتره ریښه ویستنه).

۴ . ۱ . ۱ تعریف : د بول الجبر د هغو توکو یو ډیری دی ، د کومو لپاره چی دوه دوه ځایزې نخښلونی یا اپریشنونه (عملیي)،غوڅی $\cap$ ، ټولنه $\cup$ او یوه یوځایزه عملیه ' کارول کیږي او په هغو کی دوه توکی 0 (په صفر یی په نخښه کوو) او 1 (په یوې باندې په نخښه کیږي) داسی راوتلي یا غوره شوي وي، چی د M د ټولو توکو a , b , c

لپاره لاندې اړیکې باور لري:

۱ - اسوشیاتیو قانون د ∩ او ∪ لپاره

$(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$
$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$

۲ - کموتاتیو قانون د ∩ او ∪ لپاره

$a \cap b = b \cap a$
$a \cup b = b \cup a$

۳ - رازغمني یا راکښنی یا جذب قانونونه

$a \cap (b \cup c) = a$
$a \cup (b \cap c) = a$

۴ - دیستریبوتیو قانون

$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$
$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$

۵ - د صفر او یو خویونه

$a \cup 0 = a$, $a \cap 0 = 0$
$a \cup 1 = 1$, $a \cap 1 = 1$

۶ - د کمپلیمنت یا پوره کیدونکی خویونه

$a \cup á = 1$, $a \cap á = 0$

دا اړیکي د بول د الجبر اکسیومونه هم بلل کیږي (د اکسیوم تعریف څما د شمیرپوهني کتاب کی ورکړ شوی دی) . موږ تر یوې اندازې زیات اکسیومونه ورکړل، څکه چی برخسیستمونه شته ، له کومو چی بیا دا نور اکسیو- مونه لاس ته راتللی شي.
په دې برخه کی ددې مینیمالسیستمونو کارونی یا استعمال باندې ځانونه نه مشغولوو، همدومره دلته مهم دی، چی ټول شمیر قوانین باور ولري.

که د توان یا پوتنځ ډیری P(M) په پام کی ونیول شي، د هغه د غوڅي ∩ (انگریزي meet)، ټولنه ∪ (join) او کملپلیمنت جوړونی سره او $Ø = 0 , M = 1$ سره نو دا د ∩ پورته تعریف سره سم یو د بول الجبر جوړوي. دا کارول شوي سومبولونه یوونیز یا واحد نورم ته نه دي راوړل شوي. د ∩ لپاره ∧ هم کارول کیږي او د ∪ په ځای ∨ او د á په ځای ā هم کارول کیږي.

۴ . ۱ . ۲ **بیلګه** : یو د بول الجبر باید تل یو صفر 0 او یو1 (یوی) خوندي ولري. داکیدی شي ، چی یوائي د 0 او 1 څخه جوړ وي، چی دا یی د بول ساده الجبر دی. وي

دې 0 او 1 کوم په خوبنه سومبولونه. نو په $B=\{0,1\}$ باندې عملیې $\cup, \cap$، ' په لاندې ډول تشریح کیږي:

$$0 \cap 0 = 0,\quad 0 \cap 1 = 0\ ,\quad 1 \cap 0 = 0\ , 1 \cap 1 = 1$$
$$0 \cup 0 = 0,\quad 0 \cup 1 = 1\ ,\quad 1 \cup 0 = 1\ ,\ 1 \cup 1 = 1$$
$$0' = 1 \quad , 1' = 0$$

دلته په ساده توګه د بول د الجبر قوانین ازمایل کیدی شي.
له دې سره نو جوړښت یا ستركچر $(B, \cap, \cup, ')$ یو د بول الجبر دی د دوه توكو سره .

د بول الجبر راوړل شوو اکسیومونو ته یو بل مهم خوي رامنځ ته کیږي: که په همغه وخت کې اکسیومونه $\cup$ د $\cap$ سره او $\cap$ د $\cup$ سره او 0 د 1 سره بدل شي، په دې ګروپ کی هغه بل اکسیوم لاس ته راځي . وایو: په ګروپ کی ورکړ شوي اکسیو- مونه یو بل ته دوال Dual یا دوه ګونی دي.
د بول الجبر هر خوي کیدی شي ، چی له اکسیومونوڅخه لاس ته راوړل شي، او د بول الجبر د هرې وینا څخه کیدیشي چی نومولي بدلونونه رامنځ ته شي، دا په دې مانا ، چی دوه ګونی وینا وې جوړې شي. « وینا دوګونی کیدنه ».دلته یوه ریښتیا وینا بیرته ریښتیا («د بول د الجبر یوه جمله ») وینا باندې

بدلیږي، ځکه چې د سیستم دوه ګونوالی ساتلی پاتی کیږي.
دا د بول د الجبرد دوه ګونی پرینځیپ متن دی: د هرې جملی د ثبوت سره د هغی جملی دوه ګونی هم ثبوت ده.

د بول د الجبر خویونه دې ورکړ شي او په حقیقت کي . د اکسیومونو څخه د لاس ته راوړنو په څیر .

۱ - باور لري $a = a \cap a$ او $a = a \cup a$ د بول د الجبر ټولو توکو a لپاره

اوبی: دی

$$a = a \cap 1 = a \cap (a \cup a') = (a \cap a) \cup (a \cap a')$$
$$= (a \cap a) \cup 0 = a \cap a$$

د $a = a \cup a$ لپاره ښوونه د دوه ګونوالی څخه لاس ته راځي .

۲ - د a کمپلیمنت 'a د ورکړ شوو خویونو سره یواځنی ټاکلی دی، دا په دې ماناچي باور لري $a \cap c = 0$ او $a \cup c = a$ نو دی $c = a'$.

اوبي: لمړی دی

$$a' = 0 \cup a' = (a \cap c) \cup a' = (a \cup a') \cap (c \cup a') = c \cup a'$$

او د دې سره دوه ګوني هم $a' = c \cap a'$ دی.

له دې امله

$$a' = c \cap a' = c \cap (c \cup a') = c$$

دی . څه چی د ښوولو وو (لنډ: ځ ښ وو).

۳ – صفر 0 او يوی 1 په بول الجبر کی يواځني ټاکلي دي،
دا په دې مانا چی دا يواځني تو کی دي، د هغو خويونو
سره، چی په ټکی ۵ کی ورکړ شوي دي.

اوبی : د يوه توکی n لپاره دې د بول د الجبر د ټولو توکوa لپاره باور ولري $a \cup n = a$ او $a \cap n = n$. که د $a = 0$ لپاره کيږدو، نو لاس ته راځي $0 \cup n = 0$،له بلی خوا هم $0 \cup n = 0$ او له دې امله $n = 0$ دی. د 1 لپاره اوبيونه د دوه ګونوالی څخه لاس ته راځي.

۴ – باور لري $(a')' = a$ د ټولو توکو a لپاره. دا له $a' \cap a = 0$ او $a' \cup a = 1$ څخه لاس ته راځي او د کمپليمنت د يواځنوالی څخه.

۵ – د دې مورګان De Morgan قانون

$$(a \cup b) ' = a' \cap b' \quad \text{او} \quad (a \cap b)' = a' \cup b'$$

ثبوت : د دوه ګونپرینځپ له لارې بسیا کوي، که یواځي یوه
له دې دوه ګونو ویناو څخه وښایو. دبیلګي په توګه کینه.
د دې لپاره لاندې شمیرقوانین کاروو:

$$(a \cup b) \cup (a' \cap b') = ((a \cup b) \cup a') \cap ((a \cup b) \cup b') =$$
$$= ((a \cup a') \cup b') \cap (a \cup (b \cup b') = 1 \cap 1 = 1$$

او

$$(a \cup b) \cap (a' \cap b') = (a \cap (a' \cap b')) \cup (b \cap (a' \cap b')) =$$
$$= ((a \cap a') \cap b') \cup ((b \cap b') \cap a') = 0 \cup 0 = 0$$

د دواړو مساواتځنځیرڅخه په ګډه لاس ته راځي،
چې $a' \cap b'$ د $a \cup b$ کمپلیمنټ دی.

۶ – د اسوشیاتیو و کموتاتیو قوانینو او له

$$a = a \cup a = a \cap a$$

څخه لاس ته راځي: د غوځي (ټولنی) جوړولو نتیجه

په یوه توکو پای ډیرې کی، د لړیپرلپسی څخه خپلواك
دی او له دې هم خپلواك دی ، چې یو توکي یواځي یوځل
او که یا زیات رامنځ ته کیږي. زیاتون نخښي ته ورته
لیکل کیږي: $\bigcap_{i=1}^{n} a_i$ همداسی د $\bigcup_{i=1}^{n} a_i$
د ټولو $a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_n$ لپاره، همداسی

د $a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_n$ لپاره.

۷ – دیستریبوتیو قانون هم ټولیز کیدی شي او په رینښتونی داسی

$$\left(\bigcup_{i\in I} a_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} b_j\right) = \bigcup_{i\in I, j\in J} (a_i \cap b_j)$$

او

$$\left(\bigcap_{i\in I} a_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} b_j\right) = \bigcap_{i\in I, j\in J} (a_i \cup b_j)$$

چیرته چی I او J پاي ایندکسډیري (پیژندډیري) دي

۸ – له $a \cap x = a \cap y$ او $a \cup x = a \cup y$ لاس ته راځی $x = y$

ښوونه : باور لري

$$x = x \cap (x \cup a) = x \cap (y \cup a) = (x \cap y) \cup (x \cap a) =$$
$$(x \cap y) \cup (y \cap a) = y \cap (x \cup a) = y \cap (y \cup a) = y$$

پای.

موږ دلته د بول الجبر ، لکه چی په پیل کی وویل شو، د یوه ذهني نظر له لارې تر څیړنی لاندې نیسو، په دې کی چی موږ د توکو په ډول (چی څه شی دی) کی خپله علاقه نه ګورو، بلکه یواځي دا علاقه لرو، چی له دې توکو سره څنګه شمیرنه

کیدی شي. له دې امله د بول الجبرونو M_1 او M_2 ترمنځ یو بییکتیوه څیرونه داسی موجوده ده، چی د M_1 دوه توکو ټولنه (غوڅی) د تنظیم شوو توکو ټولنه (غوڅي) تنظیم دي، او د هر توکي کمپلیمنت د ورسره تنظیم شوي توکی کمپلیمنت دی، نو په دې توګه کیدی شي ، چی دواړه الجبرونه «سوچه شمیریز» مساوي و لیدل شي. یو داسی بییکتیو څیرونه $f : M_1 \longrightarrow M_2$ لکه د مخه مو چی هم ګوته ورته نیولی ایزمورفیزم Isomorphismus نومیږي او دا راوړل شوي شرایط لنډ په لاندې ډول دي. د ټولو $a , b \in M_1$ لپاره باور لري:

$$f(a \cap b) = f(a) \cap f(b)$$
$$f(a \cup b) = f(a) \cup f(b)$$
$$f(a') = f(a)'$$

د دې سره په کیڼ لور '، $\cup$، $\cap$ د M_1 عملیي او په ښي لور د M_2 عملیي. نخښلونی یا کارونی دي.

د نور الجبرونو په څېر یا خلاف کیدی شي، چی په ټولو (پای) د بول الجبرونو باندې په ساده توګه یو د یوه پام یا نظر امکانات برابر شي. د داسي یوه پاملرنی ته دوه د بول الجبرونه باید برابر وکتل شي، که د دوي ترمنځ یو ایزومور-

فيزم موجود وي، يعنی که دا ايزمورف وي. دا لاندې مهمه جمله باور لري، چی ثبوت لپاره يی په ليو (LIU 1977) حواله ورکوو .

۴ . ۱ . ۳ جمله : هر يو د بول الجبر د يوه پاي ډيري M د برخډيريو څخه جوړ د بول د الجبر سره ايزومورف دی . په ځانګړي توګه د يوه پای بول د الجبر توکو ګڼون تل د 2^n فورم يا ډول دی ، او هر دوه پاي د بول الجبرونه د برابر ډيرو توکو سره يو د بل سره ايزومورف دي.

که څه هم موږ د پاي بول الجبرونو سره سر او کار لرو، دا بايد په ګوته شی، چی په پورته جمله کی ورکړ شوي خويونه يا کرکتريي د ناپای ډيرو توکو ډيري لپاره باور نه لري .
ناپای ډير د بول الجبرونه شته، کوم چی د ډيري د ټولو برخډيريو د الجبر سره ايزومورف نه دي. د دې لپاره چی ټولی ناپای ډير د بول الجبرونه کرکتريزه کړی شو، لاندې کليمو ته اړ يو. M دې يو ډيری وي. يو سيستم K د M برخډيريو ډيريبدن يا ډيريتن بلل کيږي، که K د A, B سره $A \cap B$ او $A \cup B$, $A \cap B$ هم خوندې ولري.
د بيلګي په توګه ټول د تواندیری ډيريتن دی. K دې د

ډیري M برخډیریو یو ډیریتن وي، د M ∈ K سره.
په K باندې کیدی شي بیا یو بول الجبر توضیح شي، په کوم کي چی ⊔ د ټولنی ،⊓ د غوځی ، تشډیری Ø د صفر ، یو ډیری M د یوې ډیری، 'A د A ∈ K کمپلیمنت M - A سره نیسی ، یعني دا ډیري تیوریتیکي کومپلیمنت. داسی یو الجبر ډیریبدن الجبر هم بلل کیږي او په ټولیزه توګه د M هر برخډیری خوندې نه لري. اوس دا لاندې جمله باور لري، چی د ثبوت لپاره دې GRÄTZER(1977) وکتل شي.

۴ . ۱ . ۴ جمله : (د ستون Stone جمله) هر د بول الجبر د ډیریتن الجبر سره ایزومورف دی.

د بول د الجبر کرکتریزه کولو سره په اړوند ، کیدی شي چی د بول د الجبر سیده ځل ګټور وکارول شي یا استعمال شي.

۴ . ۱ . ۵ تعریف : V او W دې دوه د بول الجبرونه وي، چی د هغی بنسټیز ډیري هم په V او W سره په نخښه کوو. نو دا د V او W سیده ځل V×W د بول الجبر دی د ټولو منظمو جوړو (v,w) په ډیري، چی v ∈ V

او $w \in W$ وي، د لاندي عمليو سره

$$(v,w) \cap (v_1,w_1) = (v \cap v_1, w \cap w_1)$$
$$(v,w) \cup (v_1,w_1) = (v \cup v_1, w \cup w_1)$$
$$(v,w)' = (v',w')$$

او د صفر توکی (0,0) او د يوي توکي (1,1) سره، چی د V او W همغه مساوي توکي دي.

د دې ښوونه دې د ګرانو لوستونکو دنده وي، چی وښايي، چی سيده ځل V×W په رېښتيا دبول الجبر دی.

اوس دې B د بول الجبر وي په دوه توکو باندې، يعني $B = \{0,1\}$ د ټرونونو

$$0 \cap 0 = 0 , \quad 0 \cup 1 = 1 , \quad 1 \cup 1 = 1$$
$$1 \cap 1 = 1 , \; 1' = 0 , \; 0' = 1$$

سره. د B^n لاندې، دا n–ځله، د B دځپل ځان سره سيده ځل پوهيږو. د B^n توکی منظم n–ګونی دې له توکو 0, 1 او د بول ټرونونو کمپوننت ډوله تشريح شوي.
دا په دې مانا چی:

$$(a_1, ..., a_n) \cap (b_1, ..., b_n) = (a_1 \cap b_1, ..., a_n \cap b_n)$$
$$(a_1, ..., a_n) \cup (b_1, ..., b_n) = (a_1 \cup b_1, ..., a_n \cup b_n)$$
$$(a_1, ..., a_n)' = (a_1', ..., a_n')$$
$$1 = (1, ..., 1)$$
$$0 = (0, ..., 0)$$

د بیلګي په توګه د $n = 5$ لپاره باور لري

$$(0,1,0,1,0) \cup (1,0,1,1,0) = (1,1,1,1,0)$$
$$(0,10,10) \cap (1,0,0,1,1) = (0,0,1,1,0)$$
$$(1,1,0,0,1)' = (0,0,1,1,0)$$

له دې بیلګي لیدل کیږي، چې په B^n کی ساده شمیرنه کیدی شي. له بلی خوا د B^n توکو ګڼون 2^n دی او د جملی ۴ . ۱ . ۳ هر د بول الجبر د 2^n توکو سره د B^n سره ایزومورف دی. د بول الجبر د څیړنی لپاره کیدی شي، چی دا د الجبر درس په B رالنډ کړي.

۴ . ۲ . د بول فنکشنونه او پولینومونه

موږد فنکشنونو لپاره، د ټرونونو په تعریف پیل کوو، چی ارزښتېدیری یي د بول الجبر وي. دلته دې M یو په خوښه

ډیری وي او V دې یو د بول الجبر. د دوه څیرونو

$$f, g : M \longrightarrow V$$

لپاره لاندې عملیې $\cap$ ، $\cup$ تشریح کوو، د

$$(f \cap g)(x) = f(x) \cap g(x) \quad , x \in M$$
$$(f \cup g)(x) = f(x) \cup g(x) \quad , x \in M$$

سره ، او همداسې یوکمپلیمنتجوړښت د

$$f'(x) = (f(x))' \quad , x \in M$$

سره.

د دې تعریفونو ښې اړخ پوره یا ټیك تعریف دی، ځکه چې f(x) او g(x) د V توکی دي او له دې امله $\cap$، $\cup$ موخه ور یا هدفمند دي. اوس په ساده توګه شمیرل کیږي، چې د ټولو د M په V کې څیرونو ټولګه له دې سره یو د بول الجبر کیږي، چې د هغه صفر توکي د څیرونه f ده، د f(x) سره، ټول $x \in M$ او د هغې یوي توکي د څیروني f له لارې څخه د f(x) سره، ټولو $x \in M$ دي.

یو ځانګړی حالت هلته لرو که ډیری M د V n-ځله د خپل ځان سره سیده ځل وي. موږ غواړو ټولی د V^n څیرونی په V کې د $A_n(V)$ سره په نخښه کړو او دا $A_n(V)$ د n- ځایزې د بول فنکشنونه په V باندې نومو یا بلل کیږي.

هره د f څيرونه له $A_n(V)$ هر n–ګونی $(v_1,...,v_n)$ چی د V له n توکو څخه جوړ وي، د V په يوه توکی $f(v_1,...,v_n)$ تنظيموي. د دې څيرونو لاندې يی ثابتی څيرونی او پرويکشنونه د ځانګړو ماناو يا اهميت دی. يوه ثابته څيرونه د ټولو $(v_1,...,v_n)$ لپاره همغه فنکشن ارزښت لري. يو i–ام پرويکشن x په لاندې توګه تعريف دی

د ټولو $(v_1,...,v_n) \in V^n$ لپاره $x_i(v_1,...,v_n) = v_i$,

يادونه : موږ دا ستونځې لرو، چی د شميرپوهنې ليکنه کې کله کله د کينې وښی لور ته او بيا بيرته له ښي وکينې لور ته لوستل کيږي، نو کيدی شي ، چی داپورته داسی هم وليکل شي: د ټولو $(v_1,...,v_n) \ni V^n$ لپاره

دا دا مانا لري چی : څيرونه x_i (داهم تر يوې اندازې ورسره نا بلد کار دی، چی فنکشن په x_i ښايو، خو فکر کوم، چی کومی ستونځي به د دې سره مل نه وي) هر n–ګونی د هغه په i– ام کمپوننت تنظيموي. له ثابتو څيرونو او پرويکشنونو يا پريوستونونو د ∩، ∪ ، ′ ، ′ عمليو. نخښلونو يا کارونو په مرسته يوه ځانګړې n–ځايز د بول فنکشنونو، مهم ټولګی د بول پولينومونه جوړي.

۴ . ۲ . ۱ تعریف : هره څیرونه $f : V^n \longrightarrow V$ ، کومه چی په $A_n(V)$ د پاي زیاتو د عملیو $\cap, \cup, '$ کارونو یا استعمال څخه، له ثابتو او پرویکشنونو، لاس ته راوړي، د بول n – ځایز پولینوم فنکشنونه بلل کیږي.

۴ . ۲ . ۲ بیلګه : که ثابت فنکشن په ساده توګه د هغه د ارزښت سره وښایو، داپه دې مانا چی د V د یوه توکی په څیر ، نو

$$(a \cap x_1) \cup (b \cap x_2 \cap x_3 \cap x_4) \cup (x_1 \cap x_2)'$$

یو د بول پولینومفنکشن $P : V^4 \longrightarrow V$ انځوروي: دکوم لپاره چی باور لري

$$P(v_1, v_2, v_3, v_4) = (a \cap v_1) \cup (b \cap v_2 \cap v_3 \cap v_4) \cup (v_1 \cap v_2)'$$

دلته a,b د V په کلکه ځاي په ځاي توکی دي.

یو د بول پولینوم فنکشن د یوې افادي له لارې کره ټاکلی دی، چی له ثابتو (له V څخه) او پرویکشنونو x څخه د ' ، $\cap$ ، $\cup$ له لارې جوړ وي. داسی یوه افاده د بول پولینوم بلل کیږي او دا یو د شمیرنی قانون د فنکشن ارزښت ټاکنی یا تعین لپاره راکوي، که د x لپاره i –ام

کمپوننت يو n–ګونی له V^n څخه کيښوول شي. دا شميرنه په رابنديزه توګه په V کی باور لري او دا توکي $P(v_1,...,v_n) \in V$ راکوي. د پولينوم (= افاده) او په دې پورې اړوند پولينومفنکشن(=څيرونی) ترمنځ بايد ټيك توپير وشي. اړيکی « پولينوم» د دې بول د فنکشن لپاره دا لاس ته راکوي، چی له $x_1,...,x_n$ او ثابتو څخه د ' ، ∩ ، ∪ سره ټيك راجوړي دي يا بهتره په دې باندې جوړې دي، لکه څنګه نور رييل پولينومونه د نښلونو + , * او − سره، چی نمونه يی ده

$$p(x) = a_0 + a_1x + ...+a_nx^n$$

دلته x له يوه بنسټيزې څخه دی او a_i د ټولو $i \in I$ لپاره يو رييل ګڼ دی.

دوه د بول مختلف پولينومونه په کوم کي چی x او کومی ټاکلی ثابتی، او ' ، ∩ ، ∪ کړی شي ، چی هغه پولينومونه وټاکی: دبيلګی په توګه د $x \cup (a \cap x)'$ او $x \cup (a' \cup x')$ لپاره همغه حالت دی. که دوه داسی پولينومونه له مخه ورکړ شوي وي، نو مهمه ده چی وڅيړل شي يا پريکړه په وشي، چي ايا د دوې سره برابر فنکشنونه مساوي دي. دا داسی پيښيږي، چی د هر پولينو–

مفنکشن f لپاره یو نورمالفورم $N(f)$ د یوه ټاکلی افادې په څیر داسی ورکول کیږي، چی د $f_1 \models f_2$ لپاره $N(f_1) \models N(f_2)$ باور ولري. برسیره پردې یوه تګلار ورکول کیږي، دکومې سره چی هر پولینوم په نورمالفورم ترانسفورمي کیدی شي. نو بیا دوه پولینومونه ټیك هلته همغه پولینومفنکشن دی، کله چی د هغوی نورمالفورم یو له بل سره پریوزي. دا پروګرام اوس غواړو پلی کړو.

۴ . ۲ . ۳ تعریف: ویل کیږي، چی یو n– ځایزه پولینوم په دیسیونکتیو نورمالفورم (disjnktiver Normalform) یا نورمالبڼه دی، که دا د لاندې فورم یا بڼی وي:

$$P = \bigcup_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cap x_1^{i_1} \cap x_2^{i_2} \cap \ldots \cap x_n^{i_n}$$

د دې سره $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \in V$ دی ، د ټولو $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ لپاره، هر $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ یو n–ګونی دی له ۱ او ۱– سره، او ټولنه یی په دې ټولو 2^n n –ګونو غزول کیږي، چیرته چی x_i^1 د x_i او x_i^{-1} د x_i' لپاره ځاي په ځای یا ځایول کیږي.

په ورته قانونیت یا قرارداد سره د هر پولینوم P کونیو-
نکتیو نورمالفورم بلل کیږي، دلاندې ﺻﺒﻐﯽ سره:

$$P = \bigcap_{(i_1, i_2, \ldots, i_n)} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cup x_1^{i_1} \cup x_2^{i_2} \cup \ldots \cup x_n^{i_n}$$

که یو ځانګړی دیسیونکتیو نورمالبڼه ولیکل شي، نوټول
غړي به د دیسیونکتیو نورمالفورم سره $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 0$ له
لیکلو پرېښوول شي یا صرف نظر به پرې وشي، ځکه چې
دا په نتیجه کوم تاثیر نه پرېباسی. په ورته توګه دا د دیسیو-
نکتیو نورمالفورم لپاره باور لري، که $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 1$ وي.

**۴ . ۲ . ۴ بیلګه : یو پولینوم په دیسیونکتیو نورما-
لفورم دی (د $a,b,c,\ldots \in V$ سره):**

$$(a \cap x_1 \cap x_2' \cap x_3) \cup (b \cap x_1' \cap x_2 \cap x_3') \cup$$
$$(c \cap x_1' \cap x_2' \cap x_3) \cup (d \cap x_1' \cap x_2' \cap x_3')$$

لاندې یو کونیونکتیو نورمالفورم دی:

$$(a \cup x_1 \cup x_2 \cup x_3) \cap (b \cup x_1 \cup x_2' \cup x_3) \cap$$
$$(c \cup x_1 \cup x_2 \cup x_3') \cap (d \cup x_1' \cup x_2 \cup x_3) \cap$$
$$(e \cup x_1' \cup x_2' \cup x_3')$$

۴ . ۲ . ۵ جمله : هر د بول پولینومفنکشن
$P : V^n \longrightarrow V$ لپاره ټيك يو ديسيونکتيو نورمالفورم موجود دی. نو په دې توګه ټيك يو د بول پولينوم لاس ته راځي، کله چی ټول ديسيونکتيو نورمالفورمونه جوړ شي. په همدې توګه (دوه ګوني) ويناد کونيونکتيو نورمالفورم لپاره هم باور لري.

د دې جملی د ښوونی څخه هم دلته تيرېږو، دا په نورو ادبياتو کی شته(دا دې ګران لوستونکی په پام کی ونيسی، چی دا به ځما پوره وخت ونيسی که دا هرڅه راوګورم. ځما هدف همدومره دی، لکه چی په نورو ځايونوکی می هم ګوته ورته نيولی، دا بنستيز څه راټول کړم)
د نورمالفورم د څېړلولپاره کله کله لاندې خويونه (قاعدې) ګټورې دي، کومی چی په نورمالفورم کی د$V \ni 0,1$
« ځايونو يا اينښوونو » له لارې لاسته راوړل کيږي. ځکه چی د بيلګي په توګه $x_1^{i_1} \cap x_2^{i_2} \cap \dots \cap x_n^{i_n}$ يواځي دn –ګونو لپاره له $V \ni 0 , 1$ نا مساوي 0 دي(په ريښتونی مساوي په 1)،
په کوم کی ، چی $x_j = 1$ د $i_j = 1$ لپاره او $x_j = 0$
د $i_j = -1$ لپاره دی، يعنی د دې n–ګونی
$(1^{i_1}, 1^{i_2}, \dots, 1^{i_n})$ لپاره .

قاعده ۱ : که دا لاندې

$$\bigcup_{(i_1, \ldots, i_n)} a_{i_1 \ldots i_n} \cap x_1^{i_1} \cap \ldots \cap x_n^{i_n}$$

د بول د پولينوم فنکشن $P \in A_n(V)$ ديسيونکتيو نورمالفورم وي، نو د $0 = 1' = \bar{1}^1 , 1 = 1^1$ سره باور لري

$$a_{i_1 \ldots i_n} = P(1^{i_1}, \ldots, 1^{i_n})$$

د ټولو $(i_1, \ldots, i_n)$ لپاره.

نو د بيلګي په توګه د $n = 3$, لپاره دی:

$$a_{1,-1,1} = P(1,0.1), \quad a_{-1,-1,-1} = P(0,0,0),$$
$$a_{1,1,1} = P(1,1,1)$$

ددې اړيکو وروسته د P د ديسيونکتيو نورمالفورم د ټاکلو لپاره بسيا کوي، که 2^n د P فنکشن ارزښتونه په ټولو n–ګونو کی له 0 او 1 (د V څخه) راپيدا کړو.

ليدوړ دا لاس ته راوړنی د $n = 2$ لپاره د P ديسيونکتيو نورمالفورم په لاندې توګه راکوي:

$$P = (P(1,1) \cap x_1 \cap x_2) \cup (P(0,1) \cap x_1' \cap x_2) \cup$$
$$(P(1,0) \cap x_1 \cap x_2') \cup (P(0,0) \cap x_1' \cap x_2')$$

د دې سره د ديسيونکتيو نورمالفورم لپاره دوه ګوني نتيجه

په لاندې توګه ده:

قاعده ۲ : که

$$\bigcap_{i_1, \ldots, i_n} a_{i_1 \ldots i_n} \cup x_1^{i_1} \cup \ldots \cup x_n^{i_n}$$

د بول د پولینومفنکشن P دیسیونکتیو نورمالفورم وي،
نو د $1 = 0' = 0^{-1}$, $0^1 = 0$ سره باور لري

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = P(0^{i_1}, 0^{i_2}, \ldots, 0^{i_n})$$

د بیلګي په توګه د $n = 3$ لپاره دی :

$$a_{1,1,-1} = P(0,0,1) \quad \text{او} \quad a_{-1,-1,1} = P(1,1,0)$$

پخوا له دې چې موږ د نورمالفورم ترانفورمیشن لپاره تګلار روښانه کوو، یا لیکو، نو د مختلفو څیرو ګڼون(تعداد یا شمیر) دې ورکړ شي. دلته طبعآ بول الجبرونه پای دي. که V ټیک $2^k = m$ توکي ولري، نو $A_n(V)$ لکه چی پوهیږو $m^{(m)^n}$ توکی لري، ځکه چی V^n ټیک m^n توکی لري. د بول پولینومفنکشن ګڼون د دې په څټ m^{2^n} دی، کوم چی سملاسی د نورمال فورم په څیر انځورونی څخه لاس ته راځي، ځکه چی د دلته 2^n ځلووني یا ضریبونه $a_{i_1 \ldots i_n}$

په خوښه د m توکو سره (له V څخه) ځاينيونکی يا ځاي په ځاي کيدی شي. که $m>2$ وي، نو په ټوليزه توګه کم پولينومفنکشنونه موجود دي نسبت و ځيرونو ته. که $m=2$ وي، کوم چې د کارونی يا استعمال لپاره مهم حالت انځوروي، نو بيا دواړه ګڼونه مساوي دي، په نامه 2^2 سره . له دې لاس ته راځي

۴ . ۲ . ۶ **جمله:** که $B=\{0,1\}$ دوه توکيزه د بول الجبر وي، نو هر n – ځايز د بول فنکشن ، يو د بول پولينومفنکشن په ځير انځوروړدی.

اوس د ديسيونکيو نورمالفورم د راپيداکولو تګلار و يوه پولينومفنکشن P ته، په P باندې لاندې پلونه کارول کيږي:

۱ – د دې مورګان de Morgan قاعدې د استعمال له لارې ټول کمپليمنت ' جوړښتونه تړلي x_i ته راوړل کيږي، همداسی ثابتو ته راوړل کيږي.

۲ – د دسيتريبوتيو قانونه کارونی يا استعمال سره سم P د غوځيو ټولنی ته راوړل کيږي. په دې فورم کی په ټوليزه توګه ځنی «زياتووني» (د x_i او x_i' غوځي دي) يو ځو x_i ورکيږي، مګر د هر i لپاره په يوه زياتووني کی

زیات تر زیاته یو له x_i او x_i' رامنځ ته یا راڅرګندیږي.

۳ – که د دیسیونکشن په یوه زیاتون کی یو x_i ورك شي، نو $x_i' \cup x_i$ په دې زیاتون کی د یوه «فاکتور» په څیر ورزیاتیږي(دا اړوند پولینومفنکشن نه تغیروي، ځکه چی $x_i' \cup x_i$ تل 1 ورکوي)

۴ – په دې داسی تغیر شوې زیاتوونی باندې تر هغی پورې دیستریبوتیو قانون کارول کیږي یا استعمالیږي، تر څو چی بیرته د غوڅیو ټولنه رامنځ ته شي یا راپیدا شي.
دا د برابرو زیاتونونو د ټولګی (دا په دې مانا، چی چیرته چی همغه x_i کمپلیمنت شوی وي او یا نه وي کمپلیمنت شوی) او دیسیونکتیو نورمالفورم ترتیبوو (بیرته د دیستریبوتیو قامون د کاڼنی لاندې) ، که چیرې ممکن دا ورك زیاتوونی(د x_i او x_i' غوڅی) د ځلوونو 0 سره تکمیل شي.

دا روښانه ده، چی د ټول هغه بڼه اړونی یا فورمبدلون سره، چی همغه مطلوب پولینوم پورې اړه لرونکی پولینوم فنکشن، همغه پولینومفنکشن لکه پخپله P دی. په ریښتونی سره له دې امله د پولینومفنکشن نورمالفورم وP ته لاس ته راوړو.

۴ . ۲ . ۷ بیلګه : P دې په V باندې په لاندې توګه دوه ځایز پولینومونه وي

$$P = ((a \cap x_1) \cup (b \cap x_2)')' \cup (x_1 \cup b)'$$

د $a,b \in V$ سره

لمړی پل :

$$((a' \cup x_1') \cap (b \cap x_2)) \cup (x_1' \cap b')$$

دوم پل :

$$(a' \cap b \cap x_2) \cup (b \cap x_1' \cap x_2) \cup (b' \cap x_1')$$

دریم پل

$$(a' \cap b \cap (x_1 \cup x_2') \cap x_2) \cup (b \cap x_1' \cap x_2) \cup$$
$$\cup (b' \cap x_1' \cap (x_2 \cup x_2'))$$

څلورم پل

$$(a' \cap b \cap x_1 \cap x_2) \cup (a' \cap b \cap x_1' \cap x_2) \cup$$
$$\cup (b \cap x_1' \cap x_2) \cup (b' \cap x_1' \cap x_2) \cup (b' \cap x_1' \cap x_2')$$

د

$$(b \cap x_1' \cap x_2) \cup (b' \cap x_1' \cap x_2) = (1 \cap x_1' \cap x_2)$$

له امله، د نورمالفورم په بڼه لاس ته راځي:

$$((a' \cap b) \cap x_1 \cap x_2) \cup (1 \cap x_1' \cap x_2) \cup (0 \cap x_1 \cap x_2') \cup$$
$$\cup (b' \cap x_1' \cap x_2')$$

لوستونکي دې دا نتیجی د قاعدې ۱ سره و ازمایي.

په پای کي دې n – ځایز ځانګړی د بول فنکشنونه په $B = \{0,1\}$ باندې وڅیړل شي، کوم چی همدا اوس د n– ځایز پولینومونو له لارې ، د مخه تیرې جملی سره سم راونیول کیدی یا لاس ته راتلی شي.

که P یو داسی پولینوم وي، نو P هر n–ګونی د 1 , 0 یا په 0 او یاپه 1 تنظیموي. په دیسیونیکتیو (کونیونکتیو) نورمالفورم کی ځلووني هم یا 0 او یا 1 دي او لاندې پریکړه کوو: په دیسیونکتیو نورالفورم کی ټول زیاتووني یانی $x_1^{i_1} \cap x_2^{i_2} \cap .. \cap x_n^{i_n} \cap a_{i_1 i_2 .. i_n}$ د ځلونو $a_{i_1 i_2 ... i_n} = 0$ سره پرینښوول کیږي او ځلوونی 1 نه لیکل کیږي. په کونیونکتیو نورمالفورم کی به ټول فاکتورونه (دا اوس ټولنه $x_1^{i_1} \cup x_2^{i_2} \cup .. \cup x_n^{i_n}$ ده) د ځلونو $a_{i_1 i_2 .... i_n} = 1$ سره پرینښوول کیږي یعنی صرف نظر پري کیږي او ځلوونی 0 نه لیکل کیږي. دا چی 1 او 0 د $\cup$ او $\cap$ لپاره ناپیلی یا بیتاثیره توکی دي، نو د هغه نورمالفورم باندې لیکلي پولینوم کی تغیر نه راځي . په هر حالت بیا

ثابت فنکشن د 0 ارزښت سره (داسې لیکوږ دی)
دیسیونکتیو نورمالفورم نه لري. او ثابت فنکشن د
ارزښت سره کوم کونیونکتیو نورمالفورم نه لري.

۴ . ۲ . ۸ بیلګه: د لته دې ۳ –ځایز فنکشن

$P: B^3 \longrightarrow B$ د لاندې جدول سره ورکړ شوی وي:

x_1	x_2	x_3	P
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

د قاعدې ۱ سره سم د P دیسیونکتیو نورمالفورم د
لاندې سره برابر دی.

$$(x_1 \cap x_2 \cap x_3) \cup (x_1 \cap x_2 \cap x_3') \cup (x_1' \cap x_2 \cap x_3) \cup$$
$$\cup (x_1' \cap x_2 \cap x_3') \cup (x_1' \cap x_2' \cap x_3')$$

دیسیونکتیو نورمالفورم د هر فنکشن ارزښت ۱ لپاره یو
زیاتوونی خوندې لري، په کوم کې چې x_i ولاړ دی ،

که $x_i = 1$ وي، او x_i' ولاړ وي، که $x_i = 0$ وي(په ورته توګه n– ګونی $(x_1,x_2,...,x_n)$ د فنکشن ارزښت 1 سره) . که x_i د يوه شرط په څير ونيول شي $(x_i = 1)$ نو بيا « شرطونه پوره دی » بلل کيږي، $x_i = 0$ په همدې توګه « شرطونه نه دې پوره» بلل کيږي) ، نو په دې توګه ديسيونکتيو نورمالفورم د ټول کمبينيشنونو يو ليستونه يا يوجوړشوی ليست راکوي د ټولو n شرطونو x_i سره ، په کومو کی چي 1 د فنکشن ارزښت په څير لاس ته راځي: $x_1 \cap x_2 \cap x_3'$ په همدې توګه x_1 او x_2 پوره دي او x_3 پوره نه دی.

د قانون ۲ د کونيونکتيو نورمالفورم P د لاندې سره برابر دی :

$$(x_1' \cup x_2 \cup x_3') \cap (x_1' \cup x_2 \cup x_3) \cap (x_1 \cup x_2 \cup x_3')$$

کونيونکتيو نورمالفورم د هر فنکشن ارزښت 0 لپاره يو فاکتور خوندي لري، په کوم کی چي x_i ولاړ دی يا ځای دی، که $x_i = 0$ وي او x_i' ځاي په ځاي وي ، که $x = 1$ وي (په همدې توګه n – ګونی $(x_1 , ...x_n)$ له B^n څخه د فنکشن ارزښت 0 سره) . کونيونکتيو نورمالفورم پس د کمبينيشن د شرطونو يو ليست جوړونه

ده، د کومو لاندې چې 0 د فنکشن ارزښت په ځير لاس ته راځي : $x_3' \cup x_2 \cup x_1'$ په دې مانا دې، چې x_1 یا x_2 پوره دي او یا x_3 پوره نه دی.

په الجبر $A_n(B)$ کی د $A_n(B)$ څخه دیوه د مخه ورکړ شوي پولينوم فنکشن P کمپليمنت 'P څنګه ټاکل کيږي؟ د ورکړ شوې قانونمندی له مخی د دې لپاره په ساده توګه P په یوه دیسیونکتیو نورمالفورم انځوروي، بیا نو 'P ټيك د غوځيو ټولنه ده، کومه چې د P په نورمالفورم کی نه رامنځ ته کيږي(يعنی 0 ځلوونی لري). په ورته توګه د دیسیونکتیو نورمالفورم لپاره هم مخ ته تللی شو.

۴ . ۲ . ۹ بیلګه : د اخرنی بیلګی څخه د پولينوم فنکشن P لپاره د 'P دیسیونکتیونورمالفورم په لاندې توګه ورکړ شويدی.

$(x_1 \cap x_2' \cap x_3) \cup (x_1 \cap x_2' \cap x_3') \cup (x_1' \cap x_2' \cap x_3)$

پام دې وي، چې $(p')' = P$ دی. او د دېمورګان قانون له مخی د یوه دیسیونکتیونورمالفورم کمپلیمنت کونیو- نکتیو نورمالفورم دی، نو ګورو، چې د د دیسیونکتیو

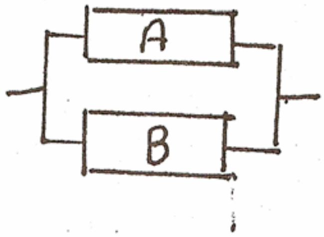
نورمالفورم 'P ځخه کونیونکتیونورمالفورم P د کمپلیمنت دجوړولو له لارې لاس ته راوړي،

۴ . ۳ سویچ الجبر یا بریښنا جیریان الجبر

په بریښنايي یا برقي سرکیټونو (Schlatkreise (En. circuit (یا بریښناجیریانکړی یا په ساده توګه :بریښنادوران) کی سویچ د بریښنا اړیکو یا بریښنا ټرونونو کی، د وازولو او بندولو لپاره دنده په غاړه لري. موږ دلته دوه ګوني دوه اړیکیز سویچونه تر ځیرنی لاندې نیسو، کوم چی په بند حالت کی برق جیریان په دواړو لورو ممکنوي. د سویچ حالت کیدی شي بند یا واز وي، یعنی ټیك دوه ازښتونه نیولی شي. واز سویچ سره ارزښت 0 تنظیموو او بند تړلي سویچ سره ارزښت 1 تنظیموو، داسی چی 0 په دې مانا دی ، چی«برق نه شته یا برق جریان نه لري» او 1 دا مانا لري، چی« برق جریان لري» . دلته 0,1 د سویچ ارزښتونه هم بلل کیږي.

کیدی شي، چی سویچونه په زیاتو ډولونو یوه سرکت ته سره

یوځاي کړی شي. دلته خورا مهم یی هغه سرکیټري circuitary دی، چی د پایډیرو غبرګسرکیټریو یا همداسی سیریالسرکیټریو په ځیر جوړ شوي وي. په ټولیزه توګه سویچونه هغه جوړښتونه وي ،کوم ، چی«واز» یا « بند یعنی تړلی» کیدی شي.



ځیره

که A او B دوه سویچونه وي، نو غبرګسرکیټېري، لکه په پورته شېره کی انځور شوی په کار واچول شي، او دا به د A v B سره په نخښنه کیږي.
په ځرګند ډول A v B یو سویچ ارزښت 1 لري، که کم له کمه یو له دې سویچونو څخه واز وي او ارزښت 0 لري، که دواړه سو-یچونه ارزښت 0 ولري. کیدی شی د سویچ ارزښتونو لپاره پخپله غبرګ سرکیټېري (یا شاید په انګریزي سرکیټ وبېل شي) داسی ولیکل شي

$0 \vee 0 = 0 , 0 \wedge 1 = 1 , 1 \vee 0 = 1 , 1 \wedge 1 = 1$

کیدیٔ شي ، چی A v B د یوځاي اآینبوول شوي سویچ په څیر وکتل شي، چی دا د A او B په اړتیا یا په واك برقجریان بهیږي یا برق جایان لري او که یا نه بهیږي یا نه پرېږدي.
د A او B سویچونو زیریالسرکیټېري A ∧ B د A او B یو بل پسی یعنی په پرلپسی توګه اینبوونی یا ځاي په ځاي کونی څخه منځ ته راځي، لکه په شېره کی چی انځور شوي.
سرکیټ یا بریښنادوران A ∧ B ټیك او ټیك هلته ارزښت 1 لري، که دواړهٔ سویچونه ارزښت 1 ولري او په غیر له دي ارزښت 0 . لنډ : $0 \wedge 0 = 0 , 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0$

او $1 \wedge 1 = 1$

دلته هم A ∧ B یو رایوځاي شوی سویچ دی.
ددې سره تړنی A v B او A ∧ B د سویچ لپاره همغه فورمالی قاعدې ډکوي یا پوره کوي، لکه د ویناو لپاره د سمسوځ له پوهی ورسره بلده په ∨ او په ∧ راوړل شوو

ټرونونو کي. هلته د یوې وینا نه والی هم موجود دی.
که ۷ ، ۸ د سویچ ارزښتونو 1 , 0 په څیر راونیسو، نوهغه په باندې شمیرقوانین د ۷ او ۸ دیوه بول الجبر لپاره په { 0 , 1 } پوره دي. هلته کومپلیمنټ هم په واك کی لرو.
دا کلیمي جوړونی د سویچ لپاره هم یوه موخه لري: د 'A سره یو سویچ په نخښه کوو، کوم چی تل یو و A ته په څټ ارزښت لري، د کوم سره، چی مور په تخنیکي ریښتینوالی یا ریالیزه باندې ددې

څیره

غوښتنو (لکه د مناسبو چالانماشین له لارې) په غم کی نه یو. 'A د A نیګیشن یا نفي هم بلل کیږي. د سویچ ارزښت لپاره دا دامانا لري، چی 0 = '1 , 1 = '0 . .په دې توګه سویچ ارزښتونه د عملیو یا کارونو ۷، ۸ ، ' سره یو دوه توکیزه بول الجبر جوړوي.

۴ . ۳ . ۱ **تعریف** : یو زیریالغبرګ سرکیټري دپای ډیرو سویچونو څخه جوړیږي د پای زیات فورمال عملیو ، ، ' د کارونی یا استعمال سره. په داسی سرکیټ کی دوه سویچونه، کوم چی همغه د سویچ ارزښتونه لري په همغه یا برابر سومبول سره په نخښه کیږي.
ټیك داسی تعریفولی شو: هر سویچ یو زیریالغبرګ سرکیټري جوړوي. که S_2 ، S_1 زیریالغبرګ سرکیټرونه وي (یعنی سره

رایوځاي اینښوولي سرکیټېري یا سویچونه) ،

نو $S_1 \wedge S_2$, $S_1 \vee S_2$ او 'S هم زیریالغبرګ سرکیټېرونه دي.

هر زیریالغبرګ سرکیټېري په ټولیزه توګه زیات پیچلي جوړ شوی سویچ دی، چې د «برخسویچونو»ځاینیونی څخه په واکوالی کې یا په اړه، واز (ارزښت 0) یا تړلی (ارزښت 1) دی. له دې امله کیدی شي، چې بیرته دوه سرکیټېونه د $\wedge$ او $\vee$ له لارې سره وتړل شي. کیدی شي، چې موږ لنډ له سرکیټېونو یا سرکیټېریو څخه وغږیږو.

د یوه زیریالغبرګ سکریټېري S د سویچ د هر ځاي نیونی لپاره د یوه ټاکلی سویچ ارزښت ټول سرکیټېري لاس ته راکوي ، په دې اړوند، چې ایا د دوي ترمنځ برېښنا بهیږي (جریان لری) او که نه. پس وي دې $A_1, \ldots, A_n$ د پورته تعریف سره سم د سرکیټ $S(A_1,\ldots,A_n)$ سویچونه ، د کومو سره چې A_i زیات واره جوړیدی شي. د سویچونو $A_1,\ldots,A_n$ هر ځاینیونه د $0, 1$ د یو n–ګونو سره برابر دی او د S له لارې یا د S سره به دا n–ګونی یا 0 او یا 1 د S په سویچ ارزښت باندې تنظیمیږي. په دې توګه سرکیټ S یو n –ځایز د بول-فنکشن f_S په دوه توکیز د بول په الجبر $B=\{0, 1\}$, $f_S : B^n \longrightarrow B$ تعریفوي(دې ته دې دلته هم پام وي او داسې نور ورته لیکنو ته ، چې دا د لاتین تورو لیکنی له کیڼ وښی لوز ته لوستل کیږي، په دې ګران لوستونکی پوهیږي، چې یادونی ته اړتیا نه شته،خو زما زړه نه ودریده) . دلته f_S په سرکیټ S اړه لرونکی

سویچ فنکشن بلل کیږي. اوس څنګه کیدی شي، چې سرکیټ په $A_n(B)$ کی د سرکیټري لپاره د ∩، ∪، ′ کارونی یا عملیې وکارونه واضح کړای شي؟ اوس دې S,T دوه سرکیټونه وي، له سویچونو A_i څخه د سویچفنکشنونو f_S , f_T سره، نو کیدی شي، چې له S , T څخه هم زیریالسرکیټري $S \wedge T$ او هم یو غبرګسرکیټري $S \vee T$ جوړ شي، پوره و یوګونو سویچونو ته ورته یا لکه همغسی لکه یو ګوني سویچونه. دا نو اوس روښانه ده، چې $f_T \cap f_S$ د $S \wedge T$ سویچفنکشن دی او $f_S \cup f_T$ د $S \vee T$ سویچفنکشن دی. بالاخره $f_S{}'$ سویچفنکشن دی و سرکیټ S' ته، کوم چې تل و S ته مخامخ– یا په بل عبارت په څټ سویچ ارزښت لري.

۴ . ۳ . ۲ تعریف : دوه زیریالغبرګ سرکیټري S او T و همغو سویچونو $A_1 , A_2 , ..., A_n$ ته، ایکویوالنت یا همغه ارزښتیز بلل کیږي، که دا همغه سویچفنکشن ورکړي، دا په دې مانا چې که د هغو سویچفنکشنونو f_S او f_T لپاره باور ولري $f_T = f_S$.

د استعمال یا کارونی د لیدټکي څخه دا تعریف موخور (همدفمند) دی، ځکه چې لمړی علاقه مو د سویچفنکشن سره ده، یعني د سرکیټ ځاننیونی ته ده او کم د هغه دننني جوړښت ته.

د سرکیټونو ترمنځ په دې پورته ورکړ شوي تعریف کی روښانه شوی اریکی په رښتینی برابرارزښته اړیکی دی، په داسی

حال کی چی دې برابرارزښتتولګی پورې تړل سرکیټونه اړه لري یا په هغه ټولګی کی دي، د همغه سویچفنکشن سره.
له دې سره د سرکیټ ځیړنه د بول الجبر په ځیړنه بیرته واړول شوه او په دې توګه شمیرپوهنیزو متودو یا لارو ته لار ,ور جوړه یا ور وازه شوه، لکه په مخته تیره برخه کی چی ودیزه شوې وې.
په سرکیټړي تیوری(Swiching Theory) او همداسی په ټولیزه توګه په سرکیټ تیوري کی دوه غوره پرابلمونه دا لاندې دي:
اول) د ورکړ شوي سرکیټړي شننه یا تحلیل او
دوم) د پلټونکی سرکیټړي سینتیز Synthese .
په شننیز حالت کی یو سرکیټړي S د مخه ورکړ شوې ده او د هغه سویچفنکشن باید راپیدای شي یا غوښتل کیږي.
د دې لپاره د S د هر سویچ $A_1;A_2,...,A_n$ د سرکیټړي S . لپاره د سویچ ارزښت باید کره وټاکل شي. کیدی چي اوس S په $A_1,A_2,...,A_n$ کی (د $x_1,x_2,...,x_n$ په ځای) باندې د بول د پولینوم په څیر انځور شي په همدې توګه یا په ورته ډول د S جوړونه په ۸.۷ ' سره له $A_1,A_2,...,A_n$ څخه .
له دې پولینوم څخه یا سیده د فنکشن ارزښت شمیرل کیږي او یا په هغو د دواړو نورمالفورمونو څخه په یوه ترانفورمي کیږي، له کومو چی بیا فنکشن په ساده توګه لوستل کیږي.
۴ . ۳ . ۳ بیلګه : لاندې سرکیټ S دې د سویچونو A , B , C سره مخ ته ږوت وي، څه د وکتل شي، په

ورته توګه د بول پولینوم په دې توګه دی

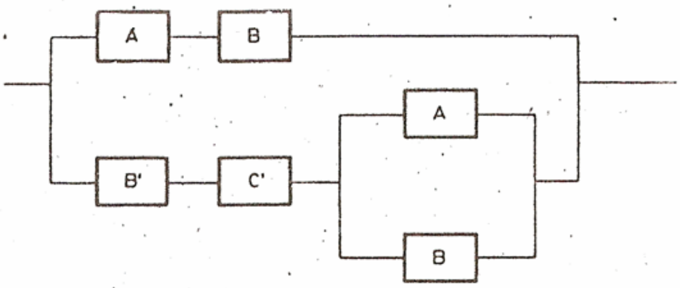
$$(A\wedge B)\vee(B'\wedge C'\wedge(A\vee B))$$

دا په دیسیونکتیو نورمالفورم اړوو:

$$(A\wedge B)\vee(A\wedge B'\wedge C')\vee(B\wedge B'\wedge C)$$

$$(A\wedge B\wedge(C\vee C'))\vee(A\wedge B'\wedge C')$$

$$(A\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge B\wedge C')\vee(A\wedge B'\wedge C')$$



د نورمالفورم (اخرنی لیکه) سملاسی د S ارزښت جدول لاس ته راځي :

A	B	C	f_S
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

تیګ د دې په څټ د سینتیز پرابلم رامنځ ته کیدنی سره د یوهسرکیټ د پرابلم رامنځ ته کیدنه ده.د لته دې د سویچفن- کشن fورکړ شوی وي، او د دې سویچفنکشن رښتیاکیدونکی

یا ریالیزه کیدونکی سرکیټري دپیدا شي. دا پرابلم یواځنی ټاکلی اوبی یا حل نه لري او امکانات شته، چی د همغه موخی لپاره جګ اوبی ولټول شي. یو په هر صورت یواځي تیوریکي مانا لرونکی اوبی سملاسی ورکول کیدی شي. که ارزښت جدول پیژندل کیږي، نو کیدی شي، چی د دیسیونکتیو نور-مالفورم ولیکل شي او د هغي سره سم یو سرکیټري جوړ کړی شي. په دې سرکیټري کی مګر د دې

رامنځته کیدونکی ګټون هر د سویچ په ټولیزه توګه نازغموړ یا بهتره بي وعدي وړ لوي وي، دا په دې مانا، چی تخنیکي ریښتینوالی به یی زیات قمته وي. دلته یو سرکیټري د کمو سویچونو سره لټول کیږي، چی هغهٔ د مخه ورکړ شوی سویچفنکشن ریښتینی کوي. د جوړولو قمت یا مصرف باندې یي یواځی د سویچونو ګټون تاثیر نه لري،بلکه جوړونه هم او همداسی د سرکیټ سکترکتور یا جوړښتړول، د زیاتو مختلفو قمتفنکشنونو له مخی پاملرنه ورته شي. داد کمون پرابلم نسبی تاونی کیدی شي حل شي. د دې پرابلمونو حل یا اوبی د بیلګي په توګه د Kohavi 1970 په کتان کی ورکړ شوی دی. د سرکیټونوکارونه د مختلفو کارخانو په چا-لانولو کی د خورا لوي اهمیت دي: په مرکزګرمی، خطرزنګ، کنترولخونوکی او داسی نور. یوګوني سویچونه په دې کی ټاکلی پیښي ، حالتونه ، او شرایط په ګوته کوي له کومو، چی د هغو ځاي مربوط دی یا اړه لري. موضوع هم دلته را لنډوو او په همدې لوستلشوو بسیا کوو.

۵ الجبرونه

یو څو بنسټیزې کلیمې

لومړی‌موخه مو دا ده، چې د دې کتاب د الجبر بنسټیزو کلیمو په څېړلو پیل وکړو، چې موږ دا په نامه ټولیز الجبر، یا لنډ الجبر بولو. برسیره پردې دلته درې مهمې جوړښتیز کلیمې پېژندل کیږي یا معرفي کیږي، چې د هغو په مرسته بیا له ورکړ شوو الجبرونو څخه نور (واړه یا کوچنی) الجبرونه ګټل کیدی شي، په نامه لاندې الجبرونه ، بیا هوموموروفي څېره کونی او بالاخره فاکتور الجبرونه، کوم چې د کونګروانیڅ اړیکو له فاکتوره کوونی څخه لاس ته راوړل کیږي.

په تکراري توګه د لته هم د الجبري جوړښتونو د بیلګې لپاره ، لومړی، لکه ددې کتاب هم ، لکه د ګروپونو په

.

درس کی مو چی ګوته ورته ونیوله ، ګروپونه څیړل کیږي.

دا تعریف به د لمړني تعریف سره لکه په برخه ۳ کی موچی کړی وو، یواځی په نخښونه کی توپیر ولري.دلته به مو د ګروپ تعریف داسی وي، چی سملاسی راته د الجبر یوه بیلګه راکوي.

۵ . ۱ . ۱ تعریف: ګروپ په پیژندل شوي ډول یو ډیری G دی، د یوه، په G باندې د دوه ځایزې کارونی یا اپریشن، نښلونی ، ګنډنی یا عملیې د تعریف سره. (دا په دې مانا ، چې یوه څیره کونه له G× G څخه په G کې د x.y <-- (x,y) سره) کوم چی لاندې قاعدې پوره کوي یا په کومو کې، چی لاندې قاعدې صدق کوي

(د ټولو) x,y,z ∈ G (لپاره باورل ري):

(اسوشیاتیو قانون) $(x.y).z = x.(y.z)$
دا اسوشیاتیو قانون په نخښو داسی لیکلی شو:

$\forall\ x, y, z \in G : ((x.y).z = x.(y.z)$

(یو) $e \in G$ (د ټولو) $x \in G$ (لپاره موجود دی، د کوم لپاره چی باور لري) :

$e.x = x.e = x$ (ناپیلی توکی)

دا پورته قاعده داسی په نخښولیکلی شو:

$\exists\ e \in G, \forall\ x \in G : e.x = x.e = x$

(د ټولو) $x \in G$ (لپاره یو) $x' \in G$ موجود دی د کوم لپاره چی باور لري:

$x.x' = x'.x$ (په څټ توکی)

دا قاعده په شمیرپوهنیزه نخښو داسی لیکلی شو:

$\forall\ x \in G \quad \exists\ x' \in G : x.x' = x'x = e$

په دې قاعدو کې د ټول کوانټور (Allquantor) $\forall$ (لوستل یی : د ټولو لپاره) او د موجودیت کوانټور (Existenzquantor) $\exists$ (لوستل یی : موجود دی) کارول شوي دي. دریمه قاعده د بیلګې په توګه داسی لو
.

ستل کېږي: «د ټولو x لپاره، چې د G توکی دی یا په کې G پروت دی ، یو توکی 'x له G څخه موجود دی، د x.x' = e سره یا په بل ډول : د کوم لپاره چې x.x' = e باور لري ». دلته e د دومې قاعدې سره ورکړ شوی ناپیلی توکی دی(یوائنی ټاکلی) . ناپیلی په شمیرپوهنه کې د یوې عملیې یا کاروني یا نبنلونې په نسبت دا مانا ورکوي، چې دا ناپیلی توکی د یوه توکی سره په همغه عملیه کې همغه توکی بیرته لاس ته راکوي، یانې د همغې عملیې سره د یوه توکی سره په نبنلونه یا عملیه کې راوستلو سره ور سره نبنلووني توکي کې بدلون نه راولی.

په پوره ورته توګه، لکه ګروپ، کیدی شي ، چې د بیلګي په توګه کړی هم تعرفي شي، چې دې کار دمخه صورت نیولی، د کوم لپاره، چې په هر حالت کې دوه عملیې په کار دي(زیاتون او ځل) . د دې پام لرنو یا کتلوڅخه د دې کتاب بنسټیزو کلیمو فکر رامنځته کیږي: د یوه « ټولیز یا عمومي الجبر » لاندې یو ډیری پوهیږو د عملیو د یوې کورنۍ سره، کوم چې تل یا ضرور باید دوه ځایز نه وي. دا اوس باید په پوره دقتې یا پوره پام ور تعریفونو کې راټول شي.

۵ . ۱ . ۲ تعریف : د هر ګڼ $n \in N \setminus \{0\}$ او هر ډیري A لپاره یوه څیره ونه $f : A^n \to A$ شته، کومه چې n– ځایزه عملیه په A بلل کیږي . د ټولو n – ځا- یزو عملیو ډیری په A د $Op_n(A)$ سره په نخښه کوو.
په A باندې د پایځایزو عملیو لاندې دا عملیي پوهیږو:

$$Op(A) := \bigcup_{n=0}^{\infty} Op_n(A)$$

۵ . ۱ . ۳ یادونه : د همدې ورکړ شوي تعریف سره به د یو صفر ځایزې عملیي لاندې څه پوه شو؟ کره دې ونیول شي، چې A^n دې د ټولو g څیره کو نو یا څیره ونو

$$g : \{0,1,2,\dots, n-1\} \to A$$

ډیری وي. په ځانګړې توګه باور لري:

$$A^0 = \{g \mid g : \emptyset \to A .$$

مګر ګورو، چې یواځې یوه څیرونه g موجود ده، یانی په نامه $g = \emptyset$ (پام دې وي ، چې هره څیرونه $g : \emptyset \to A$ په کره نیونه د جوړو یو ډیری دی، دا په نامه

$$g = \{(x,g(x)) \mid x \in B\}$$

د $B = \emptyset$ لپاره، پس $g = \emptyset$) له دې امله یوه صفرځایزه
.

عملیه یوه دا ورکړ شوې څیرونه ده : $f : \{\emptyset\} \longrightarrow A$.
دا څیرونی همداسې ټیك د A توکی په ګوته کوي، څکه چی f د $f(\emptyset) \in A$ توکی سره یواځنی ټاکلی دی، او د هر $a \in A$ (بیایی لوستل هر a له G څخه) لپاره ټیك یوه څیره ونه $f_a : \{\emptyset\} \longrightarrow A$ موجود ده، د $f_a(\emptyset) = a$ سره. له دې امله صفرځایزې اړیکی ثابتی هم بلل کیږي، او د f_a په ځاي په ساده توګه a لیکو.

۵ . ۱ . ۴ تعریف : د یوه الجبر د تیپ یا ډول لاندې یوه تنظیم شوې جوړه (f , ß) (دلته دا f باید لوي وی ، خو زه یی بل ډول امکان نه لرم، بیا د سهوو سره مخامخ کیږو، څکه چی په کمپیوتر کی د F څخه بدل بل لوی F نه لرم) پوهیږو، چیرته چی f یو ډیری دی ، چی توکي یی د عملیو سومبولونه دي او $ß : f \longrightarrow N \cup \{0\}$ یوه څیره ونه ده، کوم چی هر $f \in f$ په ځایزوالی (یاني هغه ځاي چی دا یی نیسی) ß(f) باندې تنظیم وي. دلته f یو د ß(f) – ځایزوالي عملیو سومبول بلل کیږي.

یو ټولیز الجبر (یا لنډ : الجبر) د (F, ß) تیوپ یو تنظیم شوې جوړه A = (A, F) ده ، کومه چی له ډیري A او یوې
.

په A د عملیو کورنۍ $F(f|f\in f)$ څخه منځ ته راغلی یا
جوړه شوې ده، چیرته چې هر $f\in f$ په $\beta(f)$ – ځایز عملیې
$f\in Op(A)$ باندې تنظیم شي. ډیرۍ A د A بنسټیزه ډیرۍ
بلل کیږي او د F توکی د A بنسټیزې عملیې بلل کیږي.

۵ . ۱ . ۶ یادو نه : الف) : که چیرې د لوستونکو
لپاره دا د الجبر تعریف، د د تیوپ سره ، اپریشن سومبول
سره ، او داسې نور، لږ پیچلی ښکاریږي، نو کړی شي ،
چې دا لاندې تعریف ته خپل پام راوګرځوي.

د الجبر لاندې کیدی شي ، چې یوه جوړه $A=(A,F)$ پام یا
خیال کې راولو، چې A یو ډیرۍ او F یو د په A د
عملیو یا کاروونو یا اپریشن پای ډیرۍ وي. هغه نازکوالی،
چې د مخ ته تیر تعریف و شا ته خوندي یا پټ دي؛ کیدی
شي، چې وروسته په کرار کرار د نورو تیوریو په ودیزه کې
روښانه شي.

ب) په دې کتاب کې تل د الجبر د کلیمې لاندې ټولیز یا
عمومي الجبر پوهیږو. چې په دې توګه د کلاسیکي یا
ټولګیز الجبر د کلیمې سره په یوه کړی باندې، څخه یې
.

توپیر کیدی شي. له دې امله ټولیزه یا عمومي کلیمه نه لیکو او لنډ یې «الجبر» لیکو.

پ) لیکنو ته یې یو څو یادونې : زیات وخت f د الجبر تیوپ بلل کېږي، دا په دې مانا، چې له سره مو فکر د کارونې سومبول ځایزوالی ته پام راګرځي. په څټ یا برعکس، زیات وخت د تیوپ ß څخه غبرېږو، که زیات مو موخه ځایزوالی وي او کم مو موخه د کارونې یا عملیې سومبول وي.

که یو الجبر (A,F) یواځې پای ډیرې بنسټیزې کارونې یا عملې ولري، د بیلګې په توګه $F = (f_1, f_2, ..., f_k)$، نو زیات وخت دلته $(A, f_1, ..., f_k)$ د (A, F) په ځای لیکل کیږي، او تیوپ په دې $(ß_1, ..., ß_k)$ بڼه نوټ کوو، چیرته چې $ß_i$ د f_i ځایزوالی راکوي.

د یوه تیوپ f په الجبرونو کی بنسټیزې کارونې یا عملیې د f_A سره نه په نخښه کیږي، بلکه په ساده توګه د f سره، دا په دې مانا، چې د اړوند کارونې سومبول سره، لکه چې د ابل ګروپ کی زیاتون زیات د نخښې « + » سره په نخښه کیږي. دا امکانات، چې دا به مو سهوو ته لاربنود کړي، خورا کم دي.

۵ . ۱ . ۷ بیلګه ګروپ: په دې برخه کې ، لکه په سر کې مو چې الجبر تعریف کړ، هغې ته ورته ګروپ د یو الجبر $(G, .)$ په څیر د تیوپ (2) تعریفوو (ټیك: د یوه الجبر، چې تیوپ یې $(f, ß)$ د $f = \{.\}$ سره دی او $ß(.) = 2$)، چې هغه هلته نه ورکړ شوي اکسیومونه پوره کړي. په هر حالك ګټور دی ، که ګروپ بل ډول تعریف کړو (د مخه مو ګروپ پوره څیړلی دی او هلته یې تعریف بل ډول وو و دې اوسنی تعریف ته). ورسره بلد یا مروج میتودونه دي: یو ګروپ یو الجبر $G(., ^{-1}, e)$ دی، د تیوپ $(2, 1, 0)$ ، چې لاندې اکسیومونه پوره کړي:

ګ ۱ : $(x.y).z = x.(y.z)$ (اسوڅیاتیو قانون)

ګ ۲ : $x . e = e . x = x$ (ناپیلی یا بې تاثیره توکی)

ګ ۳ : $x . x^{-1} = x^{-1} . x = e$ (په څټ توکی)

د دې متود ګټه په دې کې نغښتی ده، چې د موجودیت کوانتورونو ته اړتیا نه پیښیږي او په څټ توکی په ساده توګه د یوه یوځایزې کارونی څخه لاس ته راځي، او ناپیلی توکی د صفرځایزې کارونی په څیر په « تیوپ کی خوندې

ده». که چیرې له ټولکوانتورونو څخه تیر شو، نو کیدی شي، چی د ګروپ اکسیومونه د مساوت یا برابرون په څیر ولیکل شي، څنګه چی دلته ورکړ شوي دي. دا نور هم روښانه کیږي، چی برابرون په ټولیز الجبر کی لوي رول لوبوي.

سرې کړی شي، چی ګروپ په بل ډول هم ولیکي، د بیلګي په توګه د یو الجبر (G,p) په څیر، چی تیوپ یی (3) وي، په داسی ډول ، چی p د سرچینیزې ګروپ کارونی یا عملي د p (x,y,z) = x.y.z په څیر تعریف شوې وي.

لوستونکی دې پخپله دې ته پام کړي، چی ایا د ګروپ اکسیومونه، یواځي د p له لارې فرمولولی شي.

دې ته دې هم پام راواړول شي، چي یو ګروپ (G , . , $^{-1}$, e) ابیلي abelsche Grupp یا کموتاتیو بلل کیږي، که لاندې برانرونونه باور ولري:

ګ ۴ : $x . y = y . x$ (کموتاتیو قانون)

دا ورسره بلد یا مروج دی، چی په ابل یا کموتاتیو ګروپ کی +, - , 0 د . , e په ځای کارول کیږي.

(د زیاتون لیکنډول یا لیکندود).

ب) یو الجبر (G , .) د تیوپ {2} ګروپوئید بلل کېږي. یو ګروپوئید بل څه نه دې په غیر له یوه ډیري، چی په هغه کی یو دوه ځایزه کارونه یا عملیه کارول شوي وي، په ځانګړي توګه ګروپونه په همدې وخت کی ګروپوئید هم دي، که دا د تیوپ (2) الجبر په څیر وګڼل شي.

پ) یو ګروپوئید (H , .) نیمګروپ بلل کیږي، که (H , .) برابرون ګ ۱ پوره کړي. .

ت) یو الجبر (M , . , e) د تیوپ (2 , 0)، مونوئید بلل کیږي، که (M , .) یو نیم ګروپ وي او برسیره پر دې برابرون ګ ۲ پوره کړي.

ټ) یو ګروپوئید (Q , .) کوازیګروپ بلل کیږي، که د هر $a \in Q$ لپاره لاندې څیرونی د Q په Q باندې پرموتیشنونه وي، یعنی:

$x \rightarrow a . x$ (د a سره کیڼ ځلوونه)
$x \rightarrow x . a$ (د a سره ښی ځلوونه)

زیات وخت د کارونی یا مروج دی، چی کوازیګروپ

د تیوپ (2,2,2) الجبر (Q , . , \ , /) په څیر تعریف کړو، کوم چې لاندې برابرونونه یا مساوات پوره کوي:

$$
\begin{array}{ll}
(Q1) & x\backslash(x.y) = y \ , \\
(Q2) & (x.y) / y = x \ , \\
(Q3) & x.(x\backslash y) = y \ , \\
(Q4) & (x/y).y = x
\end{array}
$$

یا دونه: ګورو چې / او \ د ښي او کیڼې ویشنې په څیر کارول شوي(دا سي، نخښې ، چې په هر بل ځاي کې په بل مفهوم ورکړ شوې وي، همغلته به په همغه مفهوم ونومول شي)

ث) یو لوپ یو د تیوپ (0,2) الجبر (L , . , e) دی، په کوم کې چې (L , .) یو کوازیګروپ وي، او e یو ناپیلی توکی وي، دا په دې مانا چې برابرون ګ۲ باور لري. لکه د کوازیګروپ په څیر کیدی شي چې لوپ هم تعریف شي، د یوه الجبر (L , . / , \ , e) په څیر.

ج) کړی: یو د تیوپ (2,1,0,2) الجبر (R , + , - , 0 , .) کړی بلل کیږي، که (R,+,-,0) یو ابل ګروپ وي، (R , .) یو نیمګروپ او لاندې دیستریبوتیو

قوانین باور ولري:

د ۱) $x . (y + z)) x.y+x.z$

د ۲) $(x + y) z = x . z + y . z$

پام دې وي: د دې لپاره، چی نوکان مو سپما کړي وي، نو هغه له پخوا معلومه قاعده کارول کيږي، چی ټکيشميرنه له کربشميرنی له مخه ده، دا په دې مانا، چی لمړی د ټکو شميرنه بدنيز (تنيز) کيږي يا صورت نيسي لکه ځل او ويش او وربسی بيا هغه چی کربشميرنه وي لکه زياتون او کمون.
یوه اونیتار کړی (R,+,-,0,.,1) unitärer Ring (دا په دې مانا چی دا یوه کړی ده د یوي سره)، یو الجبر دی ، چیرته چی (R,+,-,0 , .) یوه کړی ده او 1 یو ورزیات شوی صفر ځائیزه کارونه یا عملیه ده، کوم چی مساوت ګ ۲ پوره کوي (طبعاً دلته 1 د e په ځاي دی).

ح تن یا بدن) یو اونیتارکړی (K , + , - , . , 0 , 1) یو تن یا بدن بلل کیږي (انکریزي field) که (K , \,{0 } , .) یو ابل ګروپ وي ، د ناپیلي توکی 1 سره. دا راته نزدې پرته ده، چی اوس که پر دې په ورزیاته توګه $x \longrightarrow x^{-1}$
(په (K \ {0 }, .) کی په ځتې خیرونه) یوه یوځائیزه کارونه یا

عملیه یا اپریشن وګڼو. دا چې 0^{-1} تعریف نه دی، نو
(K,+,-,0,., ,$^{-1}$ ، 1) به د لمړنی تعریف په موخه کوم الجبر نه وي.
د ټوټه الجبر په تیوري کی ، چی په دې کتاب کی نه راوړل
کیږي، نا پوره تعریف شوې عملیي یا کارونی اجازه لري.

خ) مودولونه Moduln . دا (R,+,-,0 , .) دې یوه کړی
وي. یو الجبر (M,+,-,0,R) د $(2,1,0,(1)_{r\in R})$ تیوپ
R–مودول بلل کیږي(یا مودول په کړی R باندې)،
که (M,+,-,0) یو ابل ګروپ وي، او د ټولو r,s ∈ R لپاره
لاندې مساوات باور ولري:

م۱) $r(x+y) = r(x) + r(y)$

م۲)) $(r+s)(x) = r(x) + s(x)$

م۳) $(r.s)(x) = r(s(x))$

په یوه اومنیتارکړی (R,+,-,.,1) باندې مودول څخه دا د
لاندې مساوات باوریوالی هم غوښتل کیږي.

م۴) $1(x) = x$

دا لمړنی بیلګه ده د ناپایڼیرو عملیو سره(طبعآ که R
ناپای وي) . برسیره پردې هم یو ځانګړی پام ضرور دی،
ځکه چی سومبولونه + , - , 0 په دوه مختلفو ماناو رامنځ
،

ته کيږي: يو ځل د ابل ګروپ (R,+,-,0) عمليي په څير او بيا د ابلګروپ (M,+,-,0) په څير. دا پرابلم په ساده توګه کيدی شي ، چی راوباسل شي، د بيلګي په توګه په کوم کي ($R, +_R, -_R, 0$) او ($M, +_M, -_M, 0$) په څير ليکل کيږي. يواځی د اسانتيا له خاطره ضرور ښکاريږي، چی د ابل ګروپونو باندې په همغه يوون د + ,- , 0 سره پاتی شو،

څ) وکتور فضا (وکتورهوا) : وي دې (K,+,-,0,.,1) يو تن . نو هر K–مودول (V,+,-,0,K) مورږ K –وکتورهوا (يا وکتورهوا يا وکتورفضا په تن K) بولو.

ځ) ترون(ترونونه) (Verband(english: lattice)) يو لاتيس يا ترون يو الجبر (L ، $\vee$ ، $\wedge$) دی، د تيوپ (2,2)، کوم چی لاندې مساوات پوره کوي:

ل ۱) $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$ کموتاتيو قانون

ل ۲) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$,

$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

(اسوځياتيو قانون)

ل۳) $x \vee x = x$, $x \wedge x = x$ (ايدمپوتينڅ)

ل ۴) $x \vee (x \wedge y) = x, \quad x \wedge (x \vee y) = x$

(ابزربشن یا راکښنه یا جذبونه)

دلته افادې " $x \vee y = z$ " او په همدېتوګه " $x \wedge y = z$ " داسې لوستل کیږي x له y سره ټرلی مساوي په z دی. همداسې x غوځ په y مساوي په z دی.

یو رابند ټرون یا لاتیس (یا ټرون د 0 او 1 سره) یو الجبر $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ ددی د تیوپ $(2,2,0,0)$, داسې چې $(L, \vee, \wedge)$ یو ټرون یا لاتیس دی او په دې برسیره لاندې مساوات هم باور لري:

ل ۵) $x \wedge 0 = 0, \quad x \vee 1 = 1$

ټرونونه به په ځانګړي توګه په ورپسې برخو کې پوره وڅیړل شي او د هغو مختلف ډولونه او هم به په هازې دیاګرام کې و ګښل شي)

د) نیم ټرون (semilattice) یو نیم ګروپ $(S, .)$

نیمټرون یا سیمیلاتیس بلل کیږي، که دا کموتاتیو او ایدمپوتنت وي. دا په دې مانا، چې که مساوات ګ ۴ او همداسې لاندې باور ولري:

س ۱) $x . x = x$ ایدمپوتنخ (Idempotenz)

د هر لاتیس $(L, \wedge, \vee)$ جوړښتونه $(L, \wedge)$ او $(L, \vee)$ په روښانه توګه سیمیلاتیسونه دي.

ذ) دیستریبوتیو ترون یا – لاټیس) یو لاټیس $(L, \wedge, \vee)$ دیستریبوتیو بلل کیږي، په کوم کې چې دا لاندې دیستریبوتیو قانونونه باور ولري:

د ل ۱) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

د ل ۲) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

کیدی شي ، چې د ل ۱ تر ل ۴) مساواتو پورې وښول شي، چې د ل ۱ او دل ۲ یو بل ته ورته دی یا همغسی دي. چې له دې مساواتو یو بیا پوره دی، یا بسیا کوي.

ر) د بول الجبر : یو الجبر $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ د تیوپ $(2,2,1,,0,0)$ د بول الجبر بلل کیږي، که $(B, \wedge, \vee)$ یو دسیتریبوتیو لاټیس وي، مساوات ل ۵ پوره کړي او په دې برسیره لاندې هم پوره کړي

ب ۱) $x \wedge x' = 0 , x \vee x' = 1$

دا څه د الجبر پورته تیرې بیلګې مو، چې دلته راوړلی، د هغو څخه به ځنی وروسته پوره ترڅیړنی لاندې ونیول شي. او س په دا همدومره بسیا کولی شو.

۵ . ۲ لاندې الجبر یا سب الجبر Subalgebra

د هر الجبري دیسخیپلین مهمه موخه داده، چې پوره بیلګي ترې لاس ته راوړل شي. زیات وخت داسې کیږي، چې د لرلو الجبري جوړښتونو څخه نوي الجبري جوړښتو نه لاس ته راوړو. په دې برخه کې به یو متود یا یوه لار وپیژندل شي یا معرفي شي، کومه چې د ټولګیزو کلیمو څخه لکه لاندېګروپ، لاندېوکتورفضا، لاندېټړون په لور لوریزه وي.

۵ . ۲ . ۱ تعریف : $A = (A,F)$ دې یو د تیوپ f الجبروي، او برخېیرې $B \subset A$ دې یو د A برخېیرې وي، د خویونو سره، چې

$$f(b_1, \ldots, b_n) \in B^n$$

د ټولو $f \in f$ لپاره او د ټولو n–ګونو $(b_1, \ldots b_n) \in B^n$ لپاره (د کومو سره، چې $ß(f) = n$ ځای په ځای کیږي). الجبر $B = (B, (f | f \in f))$ د الجبر A لاندې الجبر بلل کیږي، د کوم سره $f : B \longrightarrow B$ د ټولو $f \in f$ لپاره د f بندیزنو په څیر په ډیري B تعریف وي، د « B د A لاندې الجبر» لپاره لیکو $B \leq A$.

.د $Sub\ A$ سره د ټولو د A د لاندې الجبرونو بنسټېیریو

ډیری په نخښنه کیږي، دا په دې مانا، چی $A \neq \{ B \mid B \leq A \}$
(انګر : Subalgebra = لاندې الجبر)

یو برخډیری $B \subset A$ ټیك هلته د یوه االجبر $A = (A , F)$ لاندې الجبر بنسټډیری دی، که B د ټولو د $f_A \in F$ بنسټ عملیو سره رابنده، راتړلی وي یا رامحدوده وي. څه ناڅه ټیکه توګه زیات داسی لیکل کیږي $B = (B,F)$ ،
داپه دې مانا، چی د B د بنسټعملیو ډیری بیرته په F سره په نخښنه کیږي. لکه څنګه د f_A لپاره همداسی د f_B لپاره هم په ساده توګه د کارونی سومبول په f سره ښوول کیږي یا بهتره، نخښنون کیږي.
د ګروپ په بیلګه روښانه کیږي، چی په لاندې الجبر کی په هغه تیوپ ګڼل کیږي ،کوم چی ټاکل شوی دی: که ګروپ د یوه الجبر په څیر، چی تیوپ یی (0 , 1 , 2) دی راوړل شي یا وګڼل شي، لکه په مخ ته تیره بیلګه کی نو لاندې الجبرونه په ټولګیزه موخه لاندېګروپونه دي. که چیرې ګروپ د (2) تیوپ الجبر په څیر راوړل شي یا په پام کی ونیول شي، د ګروپ سره چی یواځنی عملیه یا کارونه ده، ممکن دي، چی لاندې الجبر لاس ته راوړو، کوم چی لاندې ګروپونه نه دي. بیا نور لاندې الجبرونه
،

لاس ته راځي، كه ګروپ د يوه الجبر ، په څير د

$$p(x, y, z) = xy^{-1}z$$

سره راوړل شي، چې دا يې يواځنی عمليه وي.

د هر الجبر لپاره دا سيستم د غوڅيجوړښت په مخامخ رابند دی. ټيك يا كره په لاندې ډول :

۵ . ۲ . ۲ جمله : A دې يو الجبر وي. نو باور لري:

الف) $A \in \text{Sub}\, A$

ب) $\mathcal{B} \in \text{Sub}A$ د هر ناتشهيري $\mathcal{B} \subseteq \text{Sub}\, A$ لپاره،

يادونه : دا افاده " $\bigcap \mathcal{B}$ " د $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$ لپاره ځاي په ځاي ده او همداسې د $\bigcap \{ B \mid B \in \mathcal{B}\}$ لپاره .

اوبې : الف) روښانه دی. د ب) د ښوونې لپاره دې وي: $\mathcal{B} \subseteq \text{SubA}$, $\mathcal{B} \neq \emptyset$. دا د ښوولو دی، چې $\bigcap \mathcal{B}$ د A د هر ې عمليي f لپاره رابند دی يا راتړلی دی. وي دې $n = \beta(f)$. له $\bigcap \mathcal{B}$ $b_1, \ldots, b_n \in$ څخه $b_1, \ldots, b_n \in B$ لاس ته راځي د ټولو $B \in \mathcal{B}$ لپاره . دا چې ټولی $B \in \mathcal{B}$ څخه د لاندې الجبرونو بنسټهيري

.

دي، نو باور لري $f(b_1, \ldots, b_n) \in B$ د ټولو $B \in \mathcal{B}$ لپاره . له دې ځخه لاس ته راځي $f(b_1, \ldots, b_n) \in B$.

۵ . ۲ . ۳ لاس ته راوړنه(دا هم دیوې جملې په څیر ده، خو له جملې ځخه لاس ته راځي): د هر الجبر A او هر برخېيري $X \subseteq A$ لپاره دی

$$<X> = \cap\{ B) \in Sub\,A \mid B \supseteq X \}$$

د A د لاندې الجبر ېستهېيری، دا په دې مانا چې $<X> \in SubA$. په څرګنده توګه $<X>$ د A د لاندپالجبرونو کوچنی بنستهېيری دی، کوم چې X خوندې لري (دا د X ځخه راجوړه یا تولید شوې لاندې الجبر) د الجبر A باندې زور اچووني له امله ډیر وخت $<X>_A$ د $<X>$ په ځاې لیکو اوله بلی خوا په ساده توګه د پاي ډیري $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ لپاره .

د بیلګي په توګه ځیوکلیکي لاندې ګروپ $(Z_6, +, -, 0)$ را نیسو (د ګڼونو $Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ سره مودول 6 شمیرل کیږي): باور لري

$$<0> = \{0\}\ , <1> = Z_6\ , <2> = \{0, 1, 4\},$$
$$<3> = \{0, 3\}\ , <2, 3> = Z_6$$

۵ . ۲ . ۴ جمله : A دې یو الجبر وي . د برخه‌یریو $X, Y \subseteq A$ لپاره باور لري:

الف) $X \subseteq \langle X \rangle$ (اکستنزیویتیت Extensität)

ب) $X \subseteq Y \Rightarrow \langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$ (مونوتوني Monotonie)

پ) $\langle X \rangle = \langle\langle X \rangle\rangle$ (ایدمپوتنت Idenmpotent)

د دې جملې اوبی سملاسی د مخ ته تیرې عملي < > له تعریف څخه لاس ته راځي. پای

بنسټه‌یری $\langle X \rangle$ په ریښتیا چی د X څخه تولید شوې د $A = (A, F)$ لاندې الجبرونو څخه لاس ته راځي د یوه تولیدپروسي سره: د هر برخه‌یري $X \subseteq A$ لپاره دې وي

$$E(X) = X \cup \{f(a_1, \ldots, a_n) \mid f \in F, a_1, \ldots, a_n \in X (n = ß(f))\}$$

وریسی دې وي

$$E^0(X) = X$$

اود ټولو $k \in N \cup \{0\}$ لپاره

$$E^{k+1}(X) = E(E^k(X))$$

۵ . ۲ . ۵ جمله : د هر الجبر $A = (A, F)$ او هر

برخډیري $X \subseteq A$ لپاره باور لري

$$\langle X \rangle = \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)$$

اوبی : « $\supseteq$ »: وي دې $\langle X \rangle \supseteq x = E^0(X)$.
نیونه دې وي، چی $\langle X \rangle \supseteq E^k(X)$، ښوول شوی دی،
او وي دې $a \in E^{k+1}(X)$. وي دې $a \notin E^{k+1}(X)$ د مخه
نیونه(ځکه، چی په بل ډول به په ساده توګه باور ولري

$(a \in \langle X \rangle$

نو $f \in F, a_1, \ldots, a_n \in E^k(X)$
موجود دی، د $a = f(a_1, \ldots, a_n)$ سره .
د $\langle X \rangle \supseteq E^k(X)$ له امله او دا چی $\langle X \rangle$ د یوه لاندې
الجبر بنسټډیري دي، لاس ته راځي $a \in \langle X \rangle$. دا
ښایي $\langle X \rangle \supseteq E^{k+1}(X)$، او په k باندې د ایندکشن

سره لاس ته راکوي $\langle X \rangle \supseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)$.

« $\subseteq$ »: یواځې دې وښوول شي ، چی $\bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)$ د یوه
لاندې الجبر بنسټډیری دی، دا په دې ما ، چی د F
د ټولو اپریشنونو په هکله رابنده یا راتړلی ده. وي دې:

$$f \in F, n = ß(n), a_1, \ldots, a_n \in \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k(X.$$

نو بیا د هر $i \in \{1, \ldots, n\}$ لپاره په لاندې توګه یو $k(i) \in N \cup \{0\}$ د $a_i \in E^{k(i)}(X)$ سره موجود دی. وي دې $m = \max\{(k(i) \mid i = 1, \ldots, n\}$. نو باور لري $a_i \in E^m(X)$ د ټولو $i = 1, \ldots, n$ لپاره. په دې پسی لاس ته راځي

$$f(a_1, \ldots, a_n) \in E^{m+1}(X) \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)$$

دا په دې مانا، چی $\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)\right)$ د f لاندې رابند یا تړلی دی دی. پای

یادونه: دا رابند یا راتړلی دا مانا لري، چی f په همغه الجبر کی باور لري. دې لغات ته دې په نورو ځایونو کی هم پام وي، چی ډیر کارول کیږي.

دا تر اوس پام په یو څو برخو کی په کار راځي، چی په خپل ځاي کی به وکتل شي.

د ډیریسیستم Sub A یواځی دې ته همدا دلته ګوته نیسم، چی د یوه الجبر A د لاندې الجبرونوینسټهډیری په

پیدایښتي یا طبیعي ډول یو تړون یا تړنه یا لاټیس جوړوي:
د B , C ∈ A لپاره دې وي

$$B \wedge C = B \cap C$$
$$B \vee C = B \cup C$$

نو لرو

۵ . ۲ . ۶جمله :د هر الجبر A لپاره (Sub A , ∨ , ∧)
یو تړون دی(د A د لاندې الجبرونو تړون یا تحت اوړیا تړونی)
اوبی دې تمرین وي: د لته د تړون اکسیومونه له ل۱ تر
ل۴ پورې ازمائیل کیږي.

۵ . ۳ ایزومورفیزم ، هومومورفیزم

Isomorphismen, Homomorpismen

دا روښانه ده ، چې د یوه الجبر ذهني خویونه تغیر نه خوري، که چیرې د الجبر د ستهړیري د توکو نومونه بدل شي ، یا بل ډول ونومول شي. دا پام یا فکر مو تړلی د ایزمورفي کلیمي ته لارښودوي .
دوه الجبره یو بل سره ایزمورف بلل کیږي، که چیرې یو الجبر له دې بل څخه د هغو توکو نومونو د بدلون له لارې لاس ته راوړی شو:

۵ . ۳ . ۱ تعریف : A او B دې دوه الجبرونه وي، د **همغه تیوپ** *f*، او u : A—>B دې یو **بیجکتیوه** bijektive **ځیرونه** وي. نو د A ایزومورفیزم په B **بلل کیږي**، که د ټولو *f* f ∈ لپاره او ټولو(f)ß = n), $a_1 , \ldots , a_n \in A$ لاندې شرطونه پوره وي:

$$uf_A(a , \ldots , a) = f_B (ua, \ldots , ua) \quad (هوم)$$

دا الجبرونه A او B بیا (یو د بل سره) **ایزومورف بلل کیږي**، په نخښونه یې B ≅ A ده.

۵ . ۳ . ۲ بیلګه

الف) : دوه ګروپونه $(G, . , ^{-1} , e)$ او $(H , . , ^{-1} , e)$ ټیك هلته ایزمورف دي، که یوه **بیجکتیو ځیرونه** u : A —> B موجود وي کوم چې د ټولو a , b ∈ G لپاره لاندېنی شرطونه پوره کوي.

(i) $u(a.b) = u(a).u(b)$
(i i) $u(e) = e$,
(iii) $u(a^{-1}) = u(a)^{-1}$

که پام وکړو، نو دلته شرطونه (ii) او (iii) د اړتیا اخوا دي، ځکه چې دا دواړه له (i) ځخه لاس ته راوړلی شو:

$$u(e) = u(e.e) = u(e).u(e) \Rightarrow u(e) = e ,$$
$$e = u(e) = u(a.a^{-1}) = u(a).u(a^{-1}) \Rightarrow u(a) = u(a)^{-1}$$

ب) $(Z_7 \setminus \{0\}, ., \ , 1)$ دې د تن $(Z_7, +, -, 0, 1)$
یو ځلیزګروپ وي. نو ایزومورفیزم

$$u: (Z_6, +, -, 0) \longrightarrow (Z_7 \setminus \{0\}, ., ^{-1}, 1)$$

په لاندې سره لاس ته راځي:

x	0	1	2	3	4	5
u(x)	1	3	2	6	4	5

د A ایزومورفیزم و B ته په ټوله توګه سیومتري نه دی.
مګر باور لري:

۵ . ۳ . ۳ جمله: که u یو ایزمورفیزم د A په B وي، نو په ځتې ځیرونه u^{-1} د B یو ایزمورفیزم دی و A ته.

اوبی : شرطونه (هوم) له همدا تیر درس څخه کیدی شي و ازمائل شي، د u^{-1} لپاره ، چی د u لپاره ځای په ځای شي.
وي دې

$f \in f, b_1, \ldots, b_n \in B$

د $a_1 = u^{-1}(b_1), \ldots, a_n = u^{-1}(b_n)$ سره، نو لاس ته راځي

$$u^{-1}(f_B(b,\ldots,b) = u^{-1}f_B(ua_1,\ldots,ua_n)$$

ځکه چي u ایزومرفیزم $= u^{-1}[uf_A(a_1,\ldots,a_n)]$

پاي $= f_A(u^{-1}(b_1),\ldots,u^{-1}(b_n))$

که د مخه تیرو لوستونو کی له غوښتنو څخه تیر شو، چی $u: A \longrightarrow B$ بیجکتیو دی، نو د هومومورفیزم ټولیزې کلیمی ته راځو. پس هومومورفیزم د الجبرونو مساوات کره نه ټاکي (تر د توکو د چاپیریال پورې لکه په ایزمورفیزم کی)، مګر بیا مو هم د جوړښت ورتوالی مخ ته پروت دی:

۵ . ۳ . ۴ تعریف : A او B دې د همغه تیوپ f الجبرونه وي. یوه څیرونه $u : A \longrightarrow B$ هومو مورفیزم د A وB ته بلل کیږي،

د ټولو $f \in f$ او ټولو $a_1, \ldots, a_n \in A \; (n = \beta(n))$ لپاره هومومورفي شرطونه (هوم) له تیر درس څخه پوره دې.

د « u یو د A هومومورفیزم دی و B ته» لپاره لنډ لیکدود « $u : A \longrightarrow B$ » هم معمول دی یا کارول کیږي.

شرط (i) د له مخ ته تیرې جملې څخه همغه ورسره بلد د هومومورفیزم شرطونه دي، د ګروپونو لپاره. ټیك په همدې توګه، لکه د ګرووپ هومومورفیزم، په ټولیزه توګه د ټولو الجبرونو د هو- مومورفیزم لپاره لاندې نخښونې معمول دي: سورجکتیو هومومو- رفیزم ایپیمورفیزم Epimorphismus بلل کیږي. که u : A—> B یو ایپیمورفیزم وي، نو B د A یو هومومورفه څیره بلل کیږي. (په نخښونه یې uA = B) . اینجکتیو هومومور- فیزم د نږدې پرتو دلایلو له امله خوندیونه Einbettung یا نغړنه (په کی) بهتره یې رانغړنه(زه یې خوندیونه بولم) بلل کیږي. (د دې لپاره راتلونکی‌یادونه وګورئ) د یوه الجبر A هومومورفیزم u: A—> A یانې هومورفیزم په خپل ځان ایندومورفیزم Endomorphimus بلل کیږي، او ایندو- مورفیزم چې په همغه وخت کې ایزومورفیزم (دا په دې مانا، چې بیجکتیو) دی د A اوتومورفیزم Automorphismus بلل کیږي د A د ټولو ایندومورفیزمونو ډیری End A په پیدایښتي یا طبیعي توګه یو نیمګروپ جوړوي، او د A د ټولو اوتومورفیزمونو Auotomorpihismen (Aut A) یو ګروپ جوړوي. د دې لپاره چې دا ولیدلی شو، لاندې دوه ویناوو ته اړتیا پیښیږي، چې اوبې یې ګرانو لوستونکو ته یوه ساده د تمرین دنده یا وظیفه ده:

یادونه : الف) د هر الجبر A لپاره کتمتې څیرونه
یانی $id\,A \longrightarrow A$ یو اوتومورفیزم دی
ب) که $u_1 : A \longrightarrow B$ او $u_2 : B \longrightarrow A$ هومومورفیزمونه
وي، نو یو په بل پسی راوړنه یا په بل پسی نښلونه $u_1 \circ u_2$
یی هم یو د A هومومورفیزم و C پسی دی.
د لهمخ ته تیرې جملی له امله د End A همداسی
د Aut A ډیري د کارونی یا عملی ° لاندې رابند یا راګیر
دی . د مخ ته تیرې جملی له امله Aut A تل دا ناپیلی
توکی id A خوندي لري. همغه تیره جمله ښایي، چی
له $u \in Aut\,A$ څخه تل $u^{-1} \in Aut\,A$ لاس ته راځي،
یعني باور لري:
۵ . ۳ . ۵ جمله: د هر الجبر A لپاره (End A,°) یو
نیم ګروپ دی (د A د ایندومورفیزم نیمګروپ) ،
او $(Aut\,A, \circ, {}^{-1}, id\,A)$ یو ګروپ دی (داسی په
نامه د A د اوتومورفیزم ګروپ)
لاندې الجبرونه او هومومورفیزم یو له بل څخه کامل
خپلواك راوړل شو. اوس به وښوول شي ، چی دا
جوړښتکلیمي یو د بل سره په یو ډول زغموړ دي:
۵ . ۳ . ۶ جمله: څیرونه $u : A \longrightarrow B$ دې یو هومو–

مورفیزم وي، نو باور لري:

الف) له $U \in Sub\,A$ څخه لاس ته راځي $uU \in Sub\,B$

ب) له $V \in Sub\,B$ څخه لاس ته راځي $\bar{u}^{1}V \in SubA$ (۲)

پ) د ټولو برخدېريو $X \subseteq A$ لپاره باور لري

$$<uX> = u< X>$$

اوبی : الف) وي دې $f \in f, b_1..., b_n \in uU$ (چیرته چی، لکه چی ورسره بلدیو، $ß(f) = n$ لیکل کیږي) .

نو $a_1, ..., a_n \in U$ موجود دي، د $b_1 = ua_1, ..., b_n = ua_n$ سره . باور لري

$$f_B(b, . . . , b) = f_B(ua , . .. , ua)$$

دا چي u هومورفیزم $= uf_A(a , . . . , a)$

د $U \in Sub\,A$ له امله $\in uU$

دا راته په ګوته کوي، چی

$$uU \in Sub\,B$$

ب) وي دې $f \in f, a^1 , . . . , a^n \in \bar{u}^{1}V$. نو باور لري $ua^1,...,ua^n \in V$.

له دې لاس ته راځي

دا چی u هومورفیزم $uf_A (a_1, . .. ,a_n) = f_B(ua_1, . . .,ua_n)$

د $V \in Sub\,B$ له امله $\in V$

$u^{-1} \in ...$ (۹) .

.

له دې ~~سټ~~ امله باور لري $f_A(a_1, \ldots, a_n) \in u^{-1}V$ او له دې

امله $(u^{-1}V \Rightarrow) \; u^{-1}V \in \text{Sub } A$

پ) E دې لکه هغه د مخه تعریف شوی اپریټر یا عملیه

وي. لمړی ښوول کیږي، چې $E(uY) = uE(X)$ د ټولو $Y \subseteq A$

لپاره باور لري: $E(uY)$ ټیك له هغو توکو uy څخه د $y \in Y$

سره جوړ دی، او همداسی له هغو توکو څخه، چې لاندې بڼه

لري $f_B(uy_1, \ldots uy_n)$ د $y_1, \ldots, y_n \in Y$ ، $f \in f$ سره.

همداسی یا په همدې ډول $uE(Y)$ له توکو uy څخه جوړ دی،

د $y \in Y$ سره، او همداسی له توکو څخه، چې لاندې بڼه لري:

$$uf_A(y_1, \ldots, y_n)$$

دا چې u یو هومومورفیزم دی ، نو بنایي چې $E(uY) = uE(Y)$.

په k باندې د اینډکشن له لارې کیدی شي،

چې $E^k(uY) = uE^k(Y)$ وښوول شي، د ټولو $k \in N \cup \{0\}$

لپاره. د له مخ ته تیرو څخه لاس ته راځي

$$< uX > = \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(uX) = \qquad uE^k(X) = u[\bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)]$$

$$= u<X> \qquad \text{پای}$$

لکه د مخه مو، چې ګوته ورته ونیوله د الجبر بنسټیري uU

د uU سره په نخښه کیږي او همداسی له مخه بلدوڅخه د

الجبر بنسټېدیري $u^{-1}V$ د $u^{-1}V$ سره په نخښنه کیږي. کیدی
شي ، همدا د مخه کیدی شي، چې زیات وکارول شي،
که د یوه الجبر A هومومورفیزم (ایزومورفیزم) په یوه
الجبر B غواړو، چې وټاکو.
بیلګه: د توکو $u \in Aut(Z_6, +, -, 0)$ د ټاکلو لپاره
فکر کیدی شي، چې $< u1 > = u<1> = uZ_6 = Z_6$. له دې
امله یا $u1 = 1$ باور لري له کوم، چې $u = id\ (=idZ)$
لاس ته راځي، او یا $u1 = 5$ دا په دې مانا چې $u = -id$.
پس:

$$Aut(Z_6, +, -, 0) = \{id, -id\}$$

په ورته توګه د $End(Z_6, +, -, 0)$ توکی هم ټاکل کیږي

لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونیوله اینجکتیو هومومور-
فیزم $u : A \to B$ خوندېونه هم بلل کیږي، د u سره A
په B کې خوندي کیږي. دا برخه چې لاندې الجبرونه او
خوندېونه په کې روښانه شوه داسې پای کیږي:
یادونه : الف) د هرې خوندیونې $u:A \to B$ لپاره
باور لري $uA \le B$ او $uA = A$ دا په دې مانا، چې uA
یو و A ته ایزومورف د B لاندې الجبر دی.
ب) د الجبر B د هر لاندې الجبر A لپاره د یو

اینکلوژنخیرونه Inklusionsabbildun

$$i : A \longrightarrow B \, , \, i(x) = x$$

یو ه خوندیونه ده.

کونګروا ینڅ اړیکی او فاکتور الجبر
Kongruenzrelationen und Faktoralgebren

لکه د ګروپ تیوري کی د نورمالپرویشوني، یا همداسی د ایدیال کلیمه په کړی تیوري کی منځنی یا مرکزي کلیمه ده، همدا ډول په ټولیزه توګه په الجبر کی د ټولیزې یا پورته کلیمي کونګروا ینڅ اړیکو کلیمه جوړوي. دا به راته څرګنده کړاي شي، چی د کونګروا ینڅ اړیکو او هومومورفیزم ترمنځ نزدې اړیکی پرتی دي، لکه څنګه چی په ګروپټیوري او همدا ډول کړیټیوري کی، کیدی شيْ چی الجبرونه د کونګر-واینڅ اړیکو له لارې فاکتوریزه کړی شو، د کوم له مخی چی «فاکتور الجبر» ته رسیږو. یو ګروپ د نورمالپرویشنونی پسی فاکتورونی کوي، په کوم کي چی د نورمالپرویشونی څنګټولګی د نوي ګروپ توکو په څیر یا په توګه وکاروي، دا په نامه فاکتورګروپتوکی. دا په څنګټولګی یا اړختټولګی د یوه ایکویوالنڅ اړیکی «ایکویوالنڅ ټولګی» جوړوي. دا

کتنه یا څېړنه د «کونګروا ینځ» فکر رامنځ ته کوي، کوم چې باید دلته تعقیب شي.

۵ . ۳ . ۷ تعریف : A دې یو ډیری وي. هر برخډیری $R \subseteq A^n$ یو په ډیري A باندې n–ځایزه اړیکه بلل کیږي.

یوه 2 –ځایزه اړیکه Θ په A باندې ایکویوالنت اړیکه بلل کیږي، که د ټولو $x, y \in A$ لپاره لاندې شرطونه باور ولري:

اي ۱) $(x,x) \in \Theta$ (رفلیکسیویتټي)

اي ۲) $(x,y) \in \Theta \Rightarrow (y,x) \in \Theta$ (سیومتري)

اي ۳) $(x, y) \in \Theta$ ، $(y,z) \in \Theta \Rightarrow (x,z) \in \Theta$

(ترانزیتیویتټي)

د $(a, b) \in \Theta$ په ځاي داسي هم لیکلی شو $a = b(\mathrm{mod}\ \Theta)$ (په کلیمو: "a په b مودولوΘ سره مساوي دی")، او یا هم داسی لکو $a\,\Theta\,b$ ، په دې توګه کیدی شي، چې اکسیوم ۳ په لاندې توګه فرمولبندې شي، له $x\,\Theta\,y\,\Theta\,z$ څخه لاس ته $x\,\Theta\,z$ راځي. د هر ایکویوالنځ اړیکو Θ لپاره د لاندې بڼې ډیری $[a]\Theta = \{x \in A \mid x\,\Theta\,a\}$ ایکوالنځټولګی بل کیږي. په روښانه یا څرګنده توګه هر یو توکی $x \in A$ ټیك د Θ یوه ګونګروایځټولګي پورې اړه لري. (ساده بیلګه د ټولګی : لکه چې یو هلك په همغه وخت کی په دوه یا

زیاتو ټولګیو پورې اړه نه شي لرودی).
د A ټولو ایکوالنتټولګیو ډیری په Eq A سره په نخښه
کوو (د ایکویوالنځټولګی الماني او انګریزی:
(ÄquivalenZklassen = equivalence relation
د ډیري A لپاره دوه ایکوالنځ اړیکی ∇_A او Δ_A په لاندې
ډول لاس ته راځی

(ټول اړیکی Allrelation) $\nabla_A = A^2 = \nabla_A$
(کټمټی یا دیاګونالی Identität oder Diagonale)
$\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\} = \Delta A$

خیره: ۱۰۱
په پورته خیره کی په ډیري {1,2,3} باندې ټول ایکوالنځ-
اړیکی د لویوالی په ترتیب بیرته ورکړ شوي دي(دا یو
د Hasse-DiaGram هازبدیاګرام دې) هر ایکویوالنت اړیکه
د ایکویوالنځټولګي په بیرته ورکړه کی انځور ده.
.

۵ . ۳ . ۸ جمله: A دې یو ډیری وي او R دې یو ناتش
د Eq A برخډیری وي. نو باور لري

$$\bigcap R \in \text{Eq } A$$

(لیکدود ته یې " $\bigcap R$ " . دا دې د مخ ته تیرو درسونو
سره انډول شي یا دا مو د مخه لوستلی دي)
اوبې : د دې ښوونه یو ساده تمرین دی. پای

دیوه ډیري A ایکویوالنځ اړیکې په طبیعي یا پیدایښتي
توګه یو لاټیس یا تړون جوړوي. یا تړوني جوړوی .
د ټولو $\Theta, \Psi \in \text{Eq } A$ دې وي

نو کیدی شي، چې په ساده توګه وښوول شي:

۵ . ۳ . ۹ جمله: د هر ډیري A لپاره ($\text{Eq}A, \vee, \wedge$)
یو تړون یا لاټیس دی (په A باندې د ایکوالنځ اړیکو تړون)
دا پورته ورکړ شوی تعریف د $\Theta \vee \Psi$ په ټولیزه توګه لړ.
مناسب دی ، که په ریښتیا $\Theta \vee \Psi$ شمیرو. د دې لپاره
کیدي شي، په خوښه دوه ځایز اړیکو Θ_1, Θ_2 لپاره

تعریف شوی د اړیکو څل

$$\Theta_1 \circ \Theta_2 = \{ (x, y) \mid \exists z \in A : x\, \Theta_1\, z\, \Theta_2\, y \}$$

وکارول شي یا استعمال شي. دا اړیکځل اسوشیاتیو دی
(د ې ښوونه دې تمرین وي) :

$$(\Theta_1 \circ \Theta_2) \circ \Theta_3 = \Theta_1 \circ (\Theta_2 \circ \Theta_3)$$

له دې امله کیدی شي، چی ډیر واره راوړل شوي نوکان له لیکلو پاتی شي.

۵ . ۳ . ۱۰ جمله : د هر ډیري A او ټولو $\Theta, \Psi \in Eq\, A$ لپاره باور لري

$$\Theta \vee \Psi = \Theta \cup (\Theta \circ \Psi) \cup (\Theta \circ \Psi \circ \Theta) \cup (\Theta \circ \Psi \circ \Theta \circ \Psi) \cup \ldots,\ldots$$

دا په دې مانا چی $(a, b) \in \Theta \vee \Psi$ ټیك هلته باور لري،
کله چی توکي $c_1, c_2, \ldots, c_n \in A$ موجود وي،
د $a = c_1\, \Theta\, c_2 \Psi c_3\, \Theta\, c_4 \ldots c_n = b$ سره.
اوبې یا ثل: تمرین دې وي: لمړی فکر کیږي، چی اوبیونی یا حل کوونی برابرون مساوات و ښي لور ته یو ایکویوالنت اړیکه پرته ده، او هر دا . په ښی لور یا اړخ، په نوکانو کی نیول شوو اړیکوځل(اړیکځل) په $\Theta \vee \Psi$ کی خوندي دی.

په یوه ډیري A باندې د یوې ایکویوالنت اړیکی Θ لپاره ډیری $A / \Theta = \{ [a]\Theta \mid a \in A \}$ د ډیري A د Θ دټولو ایکویولنتټولگیو د A فاکتور الجبر په Θ پسی بلل کیږي. فاکتورډیري زیات وخت پارتیشن Partitionen یا ټوټوونی هم بلل کیږي(ځکه، چی A / Θ د A یو ټوټونی یا تجزیه ده، په پردیو برخډیریو باندې)، او ایکووالنځټو-لگي د ټوټوونو بلاکونه بلل کیږي.
خاماخا فاکتورډیري او (چی وروسته به تعریف شي) فاکتور الجبرونه یو له بل سره سر او کار لري. وهغي لار ته مرسته کوي، که د گروپونو حالت راواخلو یا بهتره تر ځیرني لاندې ونیسو: $(G, \cdot, {}^{-1}, e)$ دې یو گروپ وي او N دې د G یو نورمالپرویشونی وي، دا په دې مانا چي یو لاندې گروپ شته د دې لاندې نورمالپرویشونی شرطونو سره:

$\forall x \in G: x^{-1} N x = N$ (د نومال پرویشوني شرتونه)
(دا پورته داسی لوستل کیږي: د ټولو x لپاره، چی له G دی یا د G توکی دی باور لري......)
وي دې Θ_N په G باندې یوه ایکویوالنځ اړیکه د ځنگټولگي aN سره د یوه ایکویوالنځ په ځیر،دا په دې مانا چی د $G / \Theta_N = \{aN \mid a \in G\}$ سره. نو کیدی

شي، چی په G/Θ_N باندې یو ګروپجوړخت یا ګروپسکترکچر $(G/\Theta_N, ., ^{-1}, e_N)$ د دې لاندې سره تعریف کړي

$$(aN).(bN) = abN,$$
$$(aN)^{-1} = a^{-1}N,$$
$$eN = eN$$

اوس دا غوره ده، چی وښوول شي، چی دا ډول تعریف شوی اپریشن یا کارونه کره تعریف ده. د بیلګي په توګه د ځل. لپاره ښوول کیدی شي، چی له $aN = a'N$ او $bN = b'N$ څخه تل $abN = a'b'N$ لاس ته راځي. دا کیدی شی، چی د نورما پرویشوني شرایطو سره ساده وشمیرل شي. دلته ویل کیږي، چی Θ_N او . یوله بل سره زغموړ دي. همداسی په ټولیزه توګه تعریفیږي:

۵ . ۳ . ۱۱ تعریف: A دې یو ډیری وي او $\Theta \in Eq\,A$ او $f \in Op_n(A)$. نو Θ او f د زغموړ بلل کیږي، که د ټول $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, ...,b_n \in A$ لپاره د $a_1\Theta\ b_1, ..., a_n \Theta\ b_n$ سره تل

$$f(a_1,...,a_n)\ \Theta\ f(b_1,...,b_n)$$

باور ولري. $\Theta \in Eq\,A$ په الجبر $A = (A,F)$ یو کونګرو- اینڅ اړیکه بلل کیږي، که Θ د ټولو f سره زغموړ وي.

په A د ټولو کونګورنیځ اړیکو ډېړۍ په Con A سره په نخښنه کیږي یا نخښوون کیږي.
(انګریزي Kongroenzrelation= congruence relation)

۵ . ۳ . ۱۲ بیلګی

الف) په هر ډیري A باندې ثابتی عملیي یا کارونی $f_c : A^n \longrightarrow A , f(x_1,...,x_n) = c$ او id_A کتمټ ځیرونی د ټولو $\Theta \in Con A$ سره زغمور دي. له دې امله د پریوستونځیرونی (المانی او انګریزي (Projektionsabbidung or projections mapping یا -عملیي باور لري:

$$p_i : A^n \longrightarrow A , p_i(x_1,...,x_n) = x_i$$

یا دونه : دې ته‌بیا ګوته نیسم، چی دا پورته ډول ځیرونه د پریوستونځیرونی Projektionsabbildung تعریف دی.

ب) د ټولو الجبرونو(A , F) لپاره $\Delta_A, \nabla_A \in Con A$ باور لري. یو الجبر (A , F)، کوم چی د Δ_A او ∇_A څخه بل کونګر-واینځ اړیکه ونه لري ساده بلل کیږي، د بیلګي په توګه د هر ډیري A لپاره الجبر ((A ,Op(A) ساده دی:

$$Con(A,Op(A)) = \{\Delta_A, \nabla_A\}$$

پ) باور لري

$$Con(A\ ,\ \emptyset) = Eq\ A$$

کیدی شي ، چی ګونګروانیخ اړیکي، د زغمووالی له لاري، د ځانګړو یوځایزو عملیو سره کرکتر.یزه شي:

۵ . ۳ . ۱۳ تعریف : (A ,F) دې یو الجبر وي. یوه څیرونه د بڼی

$$x \longrightarrow f(a_1\ ,\ ,\ a\ ...,\ a_{i-1}\ ,\ x\ ,a_{i+1}\ ,...,a_n)$$

د $f \in F$ (n – ځایز) او $a_1\ ,\ ...,a_{i.1}\ ,a_{i+1},...,a_n \in A$ سره د (A , F) یو ترانسلاشن Translation بلل کیږي.

۵ . ۳ . ۱۴ جمله: د هر الجبر (A , F) لپاره باور لري: $\Theta \in Eq\ A$ ټیك او ټیك هلته په f (A , F) باندې یو کونګروانیخ اړیکه ده، که Θ د (A , F) د ټولو ترانسلا- یشنونو سره زغمور وي.

اوبی : دا چی هر $\Theta \in Con(\ A\ ,\ F\ )$ د ټولو ترانسلیشنونو سره زغمور دی، دا سیده مخه لوستلود کونګروانیخ اړیکو څخه ته راځي. په څټ دې $\Theta \in Eq\ A$ د ټولو ترانسلیشنونو سره زغمور وي. دا باید وښوول شي چي Θ د ټولو $f \in F$ سره زغمور دی. f دې یو n–ځایزه کارونه یا عملیه وي او باور دې ولري $a_1\ \Theta\ b_1\ ,\ ...,\ a_n\ \Theta\ b_n$. دا چی هر د f څخه ګټلی

ترانسلیشن د Θ سره زغمور دی، نو لاس ته راځي

$$f(a_1,a_2,...,a_n) \ \Theta \ f(b_1,a_2,a_3...,a_n)$$
$$\Theta \ f(b_1,b_2, a_3 ,...,a_n)$$
$$.$$
$$.$$
$$\Theta \ f(b,b,...,b)$$

۵ . ۳ . ۱۵ تعریف : A دې يو الجبر وي، د تیپ f او $\Theta \in Con\ A$ سره. په لاندې توګه تعریف شوی الجبر A / Θ د الجبر A فاکتور الجبر Faktoralgebra نومیږي یا بلل کېږي و کونګروانیخ Θ پسی یا کونګروانیخ Θ ته: د A / Θ بنسټ- ډیری یی همدا فاکتورډیری A / Θ دی ، دا په دې مانا چې د Θ د ټولوکونګروانیتټولګیو ډیری. د A / Θ بنسټکارونی یا عملي د A له کارونویا اپریشنونو څخه لاس ته راوړل کیږی له

$$f_{A/\Theta} : (A / \Theta)^n \longrightarrow A / \Theta ,$$
$$f_{A/\Theta} ([a_1]\Theta,...,[a_n]\Theta = [f_A(a_1,...,a_n)]\Theta$$

څخه . کارونی یاعملیي $f_{A/\Theta}$ په دې توګه کره تعریف دي:
له $[a_1]\Theta = [b_1]\Theta,...,[a_n]\Theta=[b_n]\Theta$ څخه

$$[f_A(a_1,...,a_1)] = [f_A(b_1,...,b_n)]\Theta$$

لاس ته راځي (ټیك همدا د مخه تیر تعریف کی د وینا

د زغموالي خويونه دي).
الجبر $A/\Theta = (A/\Theta, | f_{A/\Theta} \in f))$ بيرته د تيپ يا ډول f دی. زيات وخت په ساده توګه داسي $A = (A, F)$ او $A/\Theta = (A/\Theta, F)$ ليکل کيږي.

هومومورفيزم د کونګرواينځ اړيکو او فاکتور الجبر سره کلك خپلوان دي يا کلك تړلي. دا به په لاندې کی وښوول شي.

۵ . ۳ . ۱۵ تعريف : $u : A \longrightarrow B$ دې يوه څيرونه وي . نو د u زړی (الماني Kern) په لاندې توګه تعريف دی :

$$\text{Ker}\, u = \{ (a,b) \in A^2 \mid ua = ub \}$$

دا روښانه ده، چی د u زړی تل په A باندې يو ايکويوالنځ اړيکه ده . په دې برسيره د الجبرونو لپاره باور لري:

۵ . ۳ ۱۶ جمله: د هر هومومورفيزم $u : A \longrightarrow B$ لپاره، د u زړی Ker u په A يو کونګرواينځ اړيکه ده، دا په دې مانا چی $\text{Kern}\, u \in \text{Con}\, A$ باور لري:

اوبی: f دې د A يو n-ځايز بنستېزه کارونه يا عمليه وي او باور دې ولري

$$(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n) \in \text{Kern}\, u$$

دا په دې مانا چې $ua_1 = ub_1, ..., ua_n = ub_n$ ، نو دا لاندې لاس ته راځي:

$$uf(a_1,...,a_n) = f(ua_1,...,ua_n) = f(ub_1,...,ub_n) = uf(b_1,...,b_n)$$

له دې لاس ته راځي

$$(f(a_1,...,a_n), f(b_1,...,b_n)) \in \text{Ker } u$$

دا په دې مانا چې Kern u يا د u زړى د ټولو بنسټيزو کارونو يا عمليو سره زغموړ دى. څ چ ښ و

د دې په څټ د کونګرويخ اړيکو څخه تل هومومورفيزمونه لاس ته راځي:

۵ . ۳ . ۱۷ تعريف: A دې يو ډېرى وي او $\Theta \in Eq\ A$. نو

$$P_\Theta : A \longrightarrow A / \Theta, \; P_\Theta(x) = [x]\,\Theta$$

د Θ کانوني څيرونه kanonische Abbildung بلل کيږي.

۵ . ۳ . ۱۸ جمله : A دې يو الجبر وي او $\Theta \in Con\ A$. نو کانوني څيرونه P_Θ يو سورجيکتيو هومومورفيزم:

$$P_\Theta : A \longrightarrow A / \Theta$$

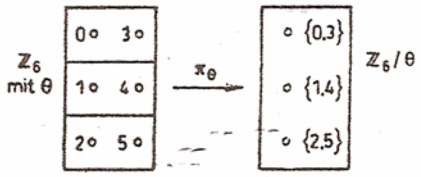
ذی. (د Θ کانوني هومومورفيزم). باور لري: د P_Θ زړی يعنی $Kern\ P_\Theta = \Theta$.

د مخ ته تيرې جملي ويناوې ساده ښوول کيږي. په تو- ليزه توګه له مخ ته تيرو دوه جملو څخه لاس ته راځي:

لاس ته راوړنه: په الجبر A باندې کونګروانيڅ اړيکی تېيك د هومومورفيزم زړي دي د A پيل سره.

۵ . ۳ . ۲۰ بيلګه: Θ دې د ګروپ $Z_6 = (Z_6, +, -, 0)$ يوه کونګروانيڅ اړيکه وي، د کونګروانيڅټولګيو $\{2,5\}$, $\{1,4\}$, $\{0,3\}$ سره.

نو $Z_6 / \Theta = (Z_6/\Theta, +, -, 0)$ د $Z_6 / \Theta = \{\{0,3\},\{1,4\},\{2,5\}\}$ او $\Theta = \{0, 3\}$ سره. په څرګند ډول باور لري $Z_6 / \Theta = Z_3$، چيرته چی Z_3 څيوکليکي يا بيرته راګرزيدونکی ګروپ دی د درې توکو سره. (وريسی څيره دې وکتل شي)



څيره ۲۸

طبعاً د يوه الجبر کونګروانيڅ اړيکي، لکه لاندې الجبرونو ته ورته، يو.ترون يا لاتيس جوړوي. د دې د کتلو لپاره دا لاندې لاس ته راوړني ته اړيو:

۵ . ۳ . ۲۱ جمله: A دي يوالجبر وي او R دې د Con A يو ناتش برخډيرى وي. نو باور لري

$$\bigcap R \in Con\ A$$

اوبى يا ثبوت: f دې د A يو n–خايزه بنستيزه كارونه يا عمليه وي، او وې دې: $(a_1,b_1),...,(_na,b_n) \in R$ ،نو باور لري: $(a_1,b_1),...,(a_n,b_n) \in \Theta$ او له دې امله

$$f(a_1,...,a_n)\ \Theta\ f(b,...,b_n)$$

د ټولو $\Theta \in R$ لپاره. له دې امله باور لري

پاى $f(a_1,...,a_n)\ R\ f(b_1,...,b_n)$

په دې پسى به وښوول شي چى د $\Theta, \Psi \in Con\ A$ لپاره تل $\Theta, \Psi \in ConA$ او $\Theta \vee \Psi \in ConA$ باور لري،

د $\wedge$ او $\vee$ سره لكه د مخه مو ، چى و ښوول.

په نورو ټكو يا كليمو سره په Θ او Ψ كى غټې خوندې اكويوالنخ اړيكى او كوچنى Θ او Ψ خوندې لرلې ايكو– يوالنځ اړيكي دواړه اوتوماتيك كونگروا‌ينځ اړيكي دي.

په داسى حال كي چى $\Theta \wedge \Psi \in Con\ A$ په دې د مخه جمله پسى ترلى لاس ته راځي د $\Theta \vee \Psi \in Con\ A$ ښونه په لاندې ډول سرته رسيدلي شي:

داچى $\Theta \vee \Psi C\ Eq\ A$ روښانه ده نو لكه د مخه مو، چى ښوولى، بسيا كوي چى د $\Theta \vee \Psi$ زغموالى د $A = (A, F)$ ترانسليشن سره وښوول شي. وي دې $(a, b) \in \Theta \vee \Psi$ او $f \in F$ د $g(x) = f(a_1,...,a_{i-1},x_i,a_{i+1},...,a_n)$ يو ترانسليشن د $f \in F$ او $a_1,...,a_{i-1},x_i,a_{i+1},...,a_n \in A$ سره.

نو $(g(a),g(b)) \in \Theta$ د ثبوت دی. جمله د

توکو $c_1,\dots,c_n \in A$ موجودیت لاس ته راکوي

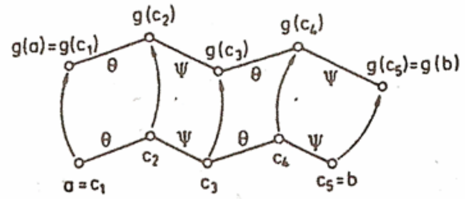
د $c_3 \,\Theta\, c_4 \dots c_n = b_n$ $a = c_1 \,\Theta\, c_2$ سره. دا چي g

د Θ همدا ډول د Ψ سره زغمور ده، نو لاس ته راځی:

$$g(a)=g(c_1)\Theta g(c_2)\,\Psi\, g(c_3)\,\Theta\, g(c_4)\dots g(c_n) = g(b_n)$$

له کومی چی د ۵.۲.۱۰ پسی $(g(a),g(b)) \in \Theta \vee \Psi$ ورکوي،

لکه څنګه چی د غوښتلو وو (دا پسی خیره دې وکتل شي).



خیره

دا پورته راوړلی فکرونه کیدی شي چی په لاندې ډول راټول شي:

۳.۵ . ۲۱ جمله: د هر الجبر A لپاره (Con A, ∧ , v)

د (Eq A , ∧ , v) یو لاندې الجبر دی. په ځانګړي توګه

(Con A , ∧ , v) یو تړون یا فرباند دی (د A کونګرو-

اینځفرباند یا کونګرواینځ تړون)

د دې جملی له مخه تیرې جملی څخه تړلی لاس ته راوړنه

لاندې هم ده:

۳.۵ . ۲۲ جمله: د هر الجبر A او هر برخډیري

$X \subseteq A^2$ لپاره

$$\Theta(X) = \bigcap\{ \Theta \in \text{Con } A| \Theta \supseteq X\}$$

یو کونګروانیڅ اړیکه په A ده، دا په دې مانا چې $\Theta(X) \in ConA$. په ښکاره ډول $\Theta(X)$ په A باندې کوچنی کونګروانیڅ اړیکه ده، چې X خوندي لري.
دلته $\Theta(X)$ هغه د X څخه جوړه شوې یا تولید کونګرو-اینڅ اړیکه بلل کیږي. د پایډیري $X=\{(a_1,b_1),...,(a_n,b_n)\}$ لپاره زیات وخت داسی لیکل کیږي $\Theta((a_1,b_1),...,(a_n,b_n))$ د $\Theta(X)$ په ځای. د $Y\subsetneq A$ لپاره په زیات وخت کې په ساده توګه د $\Theta(Y^2)$ اود$\Theta(a_1,...,a_n)$ په ځای $\Theta(Y)$ لیکل کیږي، که $Y = \{ a_1,...,a_n \}$ وي. د $\Theta(a,b)$ بنې کوانګروانیڅ اړیکی د $a|=b$ سره اصلي کوانګروانیڅ بلل کیږي.
لکه په لاندې الجبرونو کی ، دمخه دې وکتل شي، کیدی شي، چې له X و $\Theta(X)$ ته تلونکی تولیدي پروسی په روښانه ډول تشریح کړای شي یا روښانه شي. د په ساده توګه داسی کیږي، چې کونګروانیڅ اړیکي دلاندې الجبر-ونو د بنستډیري په څیر تشریح کړای شي: A دې یو الجبر وي د تیپ f د بنستډیري A سره. د نوي الجبر بنستډیری A^2 دی. د هر n –ځایزې عملي سومبول $f\in f$ همداسی یو n–ځایزه عملیه f_2 په A^2 تعریفوي د

$$f_2((x_1,y_1),...,(x_n,y_n)) = (f_A(x_1,,...,x_n),f_A(y_1,...,y_n))$$

سره.
بیا د هر $a\in A$ لپاره توکی (a,a) د صفرځایزې عملیې په څیر ورزیاتیږي، په دې برسیره د

$$s((x,y)) = (y,x)$$

سره یوه یوځایزه عملیه تعریفیږي او بالاخره په لاندي توګه تعریف شوي دوه ځایزه عملیه:

که $y_1 = x_2$ وي $t((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = (x_1,y_2)$

په بله توګه (x_1,y_1)

د فامیل F سره، چی له عملیو

$$f_2\,(f \in f),\ (a,a)\,(a \in A),\ s,\ t$$

څخه جوړ وي، هغه غوښتونکی الجبر لاس ته راځي.

(ښوونه دې د کورکار وي)

۵ . ۳ . ۲۳ جمله: د هر الجبر A لپاره باور لري

$$\text{Con } A = \text{Sub}\,(A^2, F_{Con})$$

دا په دې مانا، چی په A باندي کونګروا ینځ ټیك د (A^2, F_{Con}) لاندي الجبرونو بنستهډيري دي.

کیدي شي ، چی سیده په کونګروا ینځ اړیکو وکارول شي یااستعمال شي. ځکه چی باور لري $\Theta(X) = <X>$، د کوم سره، چی $<X>$ کوچنی X خوندي لرونکی د (A^2, F) لاندي الجبر په نخښه کوي. د $\Theta(X)$ یو بل جوړ ځېزه روښانونه به په جمله کی ورکړ شوي وي، چیرته چی د پولینوم کلیمه په واك کی لرو. یوه بله د کونګرو ینځ اړیکو او لاندېالجبرونو ترمنځ اړندونه په لاندي جمله کي روښانه شوي ده، چی ښوونه یی بیا هم ګرانو لوستونکو ته پاتی ده.

د دي له مخه یو بل تعریف : د هر ډیري A دي $\Theta \in \text{Eq } A$

او $X \subseteq A$ لپاره دې وي

$$[X] = \bigsqcup_{x \in X} [x]\Theta$$

دا په دې مانا چې $\Theta[X]$ د هغو ايکويوالنت اړيکوΘ ټولنه ده، کوم چې يو $x \in X$ خوندي ولري.

۵ . ۳ . ۲۴ جمله : وي دې A يو الجبر، $\Theta \in ConA$،

او$B \in Sub A$. نو باور لري

$[B]\Theta \in Sub A.$

عمومي الجبر تيپ او داسې نور لاندې الجر

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

۶ ترونی Verband (lattice)

۶ . ۱ ترونی او مکمل یا پوره ترونی

: گروپ تیوری اوکړی تیوري ترمنځ غبرگوالی نوري تیوري،
په ځانگړي توگه د ترونی تیوري رامنځ ته کړه یا راپورته کړه.
:ا له دې لاندې څخه لاس ته راغله: د یوه گروپ لاندېگرو-
پونه او هم د گروپ نورمالپرویشوني او په همدې توگه د
یوې په خوښه کړی ټولو لاندېکړی اویا ټول (دوه اړخیزو،
کینې اړخیز ، ښي اړخیز) ایدیالونه نسبت د ډیری تیوري
خوندیونی ته-چی نیممنظم یا نیمترتیب دي-هلته دا نیمنظم
یو څو بنسټیز خویونه لري.

۶ . ۱ . ۱ تعریف : یوه نیمترتیب ډیری S ترونی بلل
کیږي، که هغه دا لاندې دوه خویونه ولري:
الف ۱ . د توکو $a, b \in S$ هرو جوړو لپاره په S کی یو داسی
توکی $c = a \cap b$ شته. چی د a او b غوڅي بلل کیږي، د
کومو لپاره چی

$$c \leq a \quad , c \leq b$$

باور لري، که یو بل توکی c' موجود وي، چی هغه همدا شرطونه $c' \leq b$ ، $c' \leq a$ پوره کړي ، نو $c' \leq c$ دی.
الف ۲) د توکو $a, b \in S$ هرې جوړې ته په S کې یو توکی d ، چی د a او b ټولنه بلل کیږي، شته، دکوم لپاره چی

$$d \geq a \quad , d \geq b$$

باور لري، او هر بل داسی توکی d' د $d' \geq b$ ، $d' \geq a$ سره دا اړیکی $d \geq d'$ پوره کوي.

په ښکاره توګه د دوه توکو a ، b دا ټولونه $a \cup b$ او غوڅی $a \cap b$ له دې سره یواځني ټاکلي دي.دا هم په ښکاره توګه ساده لیدل کیږي، چی هر نیممنظم ډیری ، یوه ترون ته په څټ یا مخامخ ایزومورف ډیري (پرتله برخه ۲) په همدې ډول یو ترون دی. په کومو کې چی کلیمی غوڅی او ټولنه یو بل ته دوه ایزې یا دوال Dual کلیمي دي. پس کیدی شي، چی د کوم ګروپ G د یوه لاندېګروپ له ترونې او همداسی د دې ګروپ G د نورمالپرویشوني له ترونې څخه وغیرو، او همداسی د یوې کړی R د لاندې کړیو ترون او همداسی د دې کړی R د ایدیال د ترونو څخه وغیرو، که دا ایدیالونه کینې او ښي هم وي. په دې ټولو حالتو کې د لاندېګروپونو (لاندېکړیو) A , B د غوڅی څخه د هغو ډیرپټیوریکی غوڅی $A \cap B$ پوهیږو، د ټولنی په څیر د دې لاندې ګروپونو (لاندېکړیو) څخه جوړ شوي لاندې-ګروپونه(په همدې ورته توګه لاندېکړی) { A , B } .
په ټولیزه توګه کیدی شي ، د یوه الجبر د لاندی الجبرونو.

تړون څخه وغبرېږو.د تړون لپاره یوڅو نورې بېیلګی هم راوړو.
د یوه ډیرې M ټول لاندې ډیري نسبت د ډیریتیوري خوند-
بوني ته یو تړونی جوړوي، په کومو کی چی غوځي او ټولنی
د ډیریتیوري د موخی یا هدف په څیر پوهیدل کیږي، داد
لاندېډیریو M تړون به وریسی هم زیات وکارول شي.

۶ . ۱ . ۲ جمله: هر لاینې منظم ډیری L یو تړون دی،
او دا د

$$a \cap b = a \ , a \cup b = b$$

سره د $a, b \in L, a < b$ (دې ته دلته بیا هم ګوته نیسم،
چی دا په لاتین تورو لیکنه له کینږ لورلوستل کیږي) له امله.
د پیداینبتي یا طبیعي ګڼونو ډیری یو تړون دی، که د نظم
اړیکي د ویشوړوالی اړیکی ونیول شي، د غوځي رول دلته
غټ ګډ پرویشونی لوبوي او د ټولنی رول کوچنی ګډ زیات-
څله لوبوي.(دا د غ.ګ .و او ك.ګ.ز.موضوعګانی څما د
شمیرپوهنی په کتاب کی پوره څیړل شوې)
تړونونه د الجبر یو ځانګړی حالت دی. کیدی شي ، چی
تړون بې د نیمنظم له استعمال څخه،یواځي د خویونو له
مخی تعریف کړی شي، چی غوځي او تړون د بینار اړیکو
په څیر باید ولري:

۶ . ۱ . ۳ جمله : ډیریS د دوه بینار یادوه ګونو اړیکو
$a \cup b$ او $a \cap b$ سره هلته او هلته یا ټیك هلته یو تړون
دی، که دا عملیې لاندې کتمټ اړیکی پوره کړي:

یا دونه: لوستونکی دې بیا هم ماته بخښنه وکړي، که دا ساده کلیمه بیا دلته کوته لکه کړم، چی دا هلته او هلته په دې مانا دی، چی که چیرې دا شرطونه پوره وي، نو دا یو تړون دی. اوپه ښتې: که دا الجبر یو تړون وي ، نو دا شرطونه پوره دی. دا په دې مانا، چي د یوه ښخه بل لاس ته راځي او په ښتې

$II_1.\quad a \cap a = a,\quad a \cup a = a$

$II_2.\quad a \cap b = b \cap a,\quad a \cup b = b \cup a$

$II_3.\quad (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c),$
$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c):$

$II_4.\quad a \cap (a \cup b) = a \cup (a \cap b) = a$

موږ لمړی نیسو ، چی یو تړون S ورکړ شوی دی، عملیي $a \cap b$ او $a \cup b$ د الف۱ او الف ۲ لاندې تعریف شوې دي یا پیژندلای شوي دي. د II_1 او II_2 باوري کید نه بیا روښانه ده. موږ اوس خوي II_3 ازمایو او دا د غوځي لپاره. له لمړي ۱ ښخه لاس ته راځي:

$(a \cap b) \cap c \leq a \cap b \leq a.$

$(a \cap b) \cap c \leq a \cap b \leq b,$

$(a \cap b) \cap c \leq c$

همداسی لکه د لمړي ۱ پسی

$(a \cap b) \cap c < b \cap c,$

$(a \cap b) \cap c < a \cap (b \cap c)$

لاس ته راځي. په برابره یا همدې توګه دی

$a \cap (b \cap c) < (a \cap b) \cap c$

له دې سره II_3 باوري کيږي

وريسې بيا د لمړي ۱ پسې روښانه دي

$$a \cap (a \cup b) < a ;$$

په همدې توګه له بلې خوا $a < a$ باور لري او د لمړي۲

له امله $a < a \cup b$ ، پس د لمړي ۱ پسې دی

$$a < a \cap (a \cup b)$$

له دې څخه د II_2 باوري کيدنه لاس ته راځي.

اوس دې يو ډيرىS د دوه بينار يا دوه ګونو اړيکو سره ورکړ شوي وي، کوم چې خويونه II_1 او II_4 لري. د $a, b \in S$ لپاره خويونه

$$a \cap b = a, \quad a \cup b = b \qquad (1)$$

تل سملاسي پوره دې يا پوره نه دي. که $a \cap b = a$ وي نو له II_4 او II_2 څخه

$$(a \cup b) = (a \cap b) \cup b = b$$

لاس ته راځي.

که د دې په څېر $a \cup b = b$ وي، نو II_4 پسې لرو

$$a \cap b = a \cap (a \cup b) = a$$

که د توکو a او b لپاره مساوات (۱) باور ولري،

نوکيږدو $a \leq b$. له دې سره په ډيريS کې يو نيمنظم

پلی کيږي. په رينبتونی $a \leq a$ د II_1 په بنسټ دی.

که په دې ورزيات $a \leq b$ او $b \leq c$ باور ولري، يعنی

$$a \cap b = a, b \cup c = b ،$$

نو د II_3 سره سم لاس ته راځی:

$$a \cap c = (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) = a \cap b = a$$

دا په دې مانا، چې $a \leqq c$. بالاخره دی: $a \leq b$, $b \leq a$,
په $a \cap b = a$, $b \cap a = b$ له II_2 بیا لاس ته $a = b$ راځي .
پسی ترلی د لمړي ۱ شرط باورېوالی یا باوریتوب ښایو. له
$(a \cap b) \cap a = a \cap (a \cap b) = (a \cap a) \cap b = a \cap b$
څخه لاس ته راځي $a \cap b \leq a$ ، په ورته توګ کیدی شي
$a \cap b \leq b$ وښوول شي.
د دې په څېر په S کی دې یو په خوښه توکی 'c ټاکلی وي،
کوم چی شرطونه $c' \leqq a$, $c' \leqq b$ دا په دې مانا چی

$$c' \cap a = c' , \quad c' \cap b = c'$$

پوره کوي، نو باور لري

$$c' \cap (a \cap b) = (c' \cap a) \cap b = c' \cap b = c'$$

له کوم چی $c' \leqq a \cap b$ لاس ته راځي. دا توکی $a \cap b$ په
تعقیب د توکو a او b غوځي د لمړي ۱ په موخه یا هدف
انځوروي. په ټیك دې سره سمه توګه توکی $a \cup b$ ښوول
کیدی شي، چی د توکو a او b ټولنه ده، د لمړي ۲ په
موخه یا هدف.
څمور د ترون د کلیمي دوم تعریف په ګوته کوي، چی ترون
د ټولیز الجبر پریمیتیو ټولګي یا ساده ټولګی جوړوي، د
دې دوه دوه ځایزو عملیو سره(دا مو د مخه په ګوته کړي
وو، چی ساده ټولګی څه ته وایي)
دا د ترون د کلیمي هغه زړی دی، څنګه چی دا د لاندې
ترونو او ایزومورفو څیرونو او د ترونونو د خوندیونو لپاره
په پام کې نیول کیږي.

۶ . ۱ . ۴ تعریف : یو د ټرون S لاندېډېری T لاندېټرون بلل کیږي، که دا د مخ ته تعریف شوې، د الجبر په موخی راوړل شوي ټرون، یو لاندې الجبر انځور کړي. د نورو ټکو سره یا کلیمو سره یا په بل ډول T د هرو دوه توکو a او b غوځی $a \cap b$ او د هغو توکو ټولنه $a \cup b$ خوندې لري، نسبت وهغو عملیو ته چې په ټرون S کی تعریف شوي دي، چی T پخپله یو ټرون شي وهغو عملیو ته چي په S کی تعریف شوي وي.

دې ته دې پام وي، چی د یوه ټرون S یو لاندې ډیری T نسبت په S کی تعریف شوي نیمنظم ته چی هغه په کی هم باور و لري، ښوول کیدی شي، مګر دا ضرور نه ده یا په نورو کلیمو ، تل داسی نه ده، چی دا دې یو لاندېټرون جوړ کړي. د ګروپ G د ټولولاندېګروپونو ټرون د ډیریتیوري له مخي نظم راوستی شي، خو دا ټرون د ګروپ G د ټولو لاندېډیریو ټرون لاندېټرون نه انځوروي، ځکه چی ټولنه په دواړو ټرونونو کی مختلفی ماناوې لري. په همدې توګه د یوې کړی R د لاندېکړیو ټرون هم همداسی دی، چی په ټولیزه توګه دکړی د زیاتونیګروپ لاندېګروپونه ټرون نه جوړوي.

۶ . ۱ . ۵ جمله : د یوه ګروپ G د نورمالپرویشونو ټرون د زیاتونګروپ G د ټولولاندېګروپونو لاندې ټرون نه دی، چی دا مو د مخه د ګروپتیوري کی ښوولی دی.

۶ . ۱ . ۶ تعریف : د یوه تړوني S را په څنګیدونکی یواځنی ځیرونه یا په بل عبارت یو اینجکتیوه ځیرونه u په تړون 'S باندې یوه ایزومورفه ځیرونه ده یا په بل عبارت یوه ایزومورفه خوندیونه ده د S په 'S کی ، که د په خوښه توکو a , b ∈ S لپاره

$$(a \cup b)\, u = au \cup bu \; , \quad (a \cap b)\, u = au \cap bu$$

باور ولري

یادونه : د u لپاره په کتابونوکی زبات وخت یونانی توری ځای په ځای کیږي، مګر زه دا ستونځي لرم، چی یونانی توري می په پروګرام کی نه شته. هیله ده چی ځیرونی او د یوه ډیری توکی توپیر ته به د ګرانو لوستونکو پام وي) دا د S او 'S یو ایزومورفیزم دی. چی د ټولیز الجبر په ځیر راوړل شوي تړوني یی یو له بل سره لري.

۶ . ۱ . ۷ جمله :د یوه تړوني S ایزومورف خوندیونه u په تړونS کی.د نیممنظم ډیریو په موخه یا هدف د ډیري S په ډیري S کی یو ایزومورفیزم انځوروي.

اوبی : د اوبیونی لپاره ټکو a , b ∈ S . که a < b وي یعنی $a \cap b = a$. نو وبه لرو

$$(a \cap b)\, u = au \cap bu = au$$

او له دې امله لاس ته راځي au < bu . که دا پام په څټ یا په برعکس لور وکړو او وکاروو. چی u یو یواځنی په څنګیدونکی دی. نو له au < bu ځخه هم a < b لاس

ته راځي.
دا پورته بيلګی را ته ښايي، چی په څټ ثابتونه باورنه لري.
د دوه ډيريو S او S' لپاره ، چی نيممنظمي دي، يو ايزو-
مورف څيروني u ته د S په S' کی، هلته اړتيا يا
ضرورت شته، چی S او S' دواړه ترونونه وي. دا د S
ايزمورفی څيرونی کي په S' باندې بل ډول ځانونه نيسي.

۶ ۱ . ۸ جمله : که ترونونه S او S' ورکړ شوي وي،
نو د نيم نظم په موخه هر ايزمورف څيرونه د S په S'
باندې ترون S ايزمورف په ترون S' باندې انځوروي.
اوبی : په ريښتيني د $a, b \in S$ سره له $a \cap b \leq a$
څخه هم $(a \cap b)u \leq au$ او په همدې توګه

$$(a \cap b)u \leq bu$$

که $c' \in S$ داسی وي، چی $c' \leq au$ او $c' \leq bu$ باور
ولري، او c د S هغه توکی وي، د کوم لپاره چی
$cu = c'$ دی، نو لاس ته راځي $c \leq a$ او $c \leq b$ دا
په دې مانا چی $c \leq a \cap b$ له کوم څخه چی
$cu < (a \cap b)u$ لاس ته راځي. له دې سره سم
لاس ته راځي

$$(a \cap b)u = au \cap bu$$

د ټولنی لپاره يی ښوونه يا اوبيونه په همدې توګه ده. موږ
دا هم په پام کی نيسو، چی په ترونونو باندې د هومورفيزم
اوټولی هغه کيلمي چی په خوښه، د ټوليزالجبرونو په ساده

یا پریمیتو ټولګیو کارول کیږي، کارولی شو. (دلته نورې بیلګې هم شته خو هغه موضوعګانی موږ نه دې څیړلی ، له دې امله یې نورې زه هم دلته نه ګوته لکی کوم)
د تیرو بینار اړیکو په بنسټ(لمړی برخه دې وکتل شي)، په یوه ډیرې M باندې بینار اړیکی یو تړوني جوړوي، کوم چی د M×M ډیري د ټولو لاندې ډیریو سره پریوځي، یا برابر دی. په همدې توګه په یوه ډیري M باندې تعریف شوي ایکویوالنت اړیکي یو تړون جوړوي، لکه په برخه ۱ کی چی ښوول شوي دي. دا د ایکویوالنت اړیکو تړون د بینار اړیکو د تړون لاندې تړون نه دی.

۶ . ۱ . ۹ جمله: هر تړون په یوه ځانګړي ډیري باندې تعریف شوي ایکویوالنت اړیکو تړون کی ایزومورف خوندې دی.
(Whitman, Bull.Amer. Math. Soc 52(1946), 507 - 522)

۶ . ۱ . ۱۰ جمله :په یوه ورکړ شوي ډیري باندي تعریف شوی تړون د یوه ټاکلی ګروپ ټولو لاندېګروپونو تړون کی ایزومورف خوندي دی.
(Brkhoff , Proc .Cambr.Phil.Soc 31(1935) , 433 - 454)
له دې سره سم هر تړون د یوه ټاکلی ګروپ ټولو لاندېګرو- پونوتړون کی ایزومورف خوندي دی.
ډیر دا مخ ته راوړل شوي تړونونه – لکه د یوه ډیري M لاند- ډیریو تړون ، د یوه ګروپ G لاندېګروپونو تړون، د یوې

کړی R د ایدیالونو تړون ، په یوه ډیرې کی د ایکویوالنځ-
اړیکو تړون، - دا سی خویونه لري، د هغو غوڅی او ټولنه
نه یواځې د دوه توکو لپاره بلکه د اسوځیاتیو قانون سره
سم د زیاتو توکو لپاره روښانه یا تشریح شوي ده، بلکه د
ناپای ډیرو ډیریو لپاره هم.
په بل ډول افاده کوو، دا تړونونونه دلاندې تعریف سره سم
پوره تړونونه انځوروي:

۶ . ۱ . ۱۱ تعریف : یو نیم منظمډیری S پوره تړون یا
مکمل تړون بلل کیږي، که په خوښه ناتش لاندیډیري $A \subseteq S$
لپاره په S کي توکي c او d د لاندې ورکړشوو خویونو سره
سم موجود وي:
الف ۱ . د ټولو $a \in A$ لپاره نامساوات $c \leq a$ باور لري،
هر وروستی توکی c' د $c' \leq a$ سره د ټولو $a \in A$ لپاره
شرطونه $c' \leq c$ پوره کوي.
دوم ۲ - د ټول $a \in A$ لپاره نامساوات $d \geq a$ باور
لري، هر وروستی توکي d' د $d' \geq a$ سره د ټولو $a \in A$
لپاره شرطونه $d' \geq d$ پوره کوي.
دا یواځنی ټاکلی توکی c او d د لاندېډیري A د توکو
غوڅی او همداسی ټولنه بلل کیږي. د سومبولونو سره
کیدی ، چې c او d په لاندې توګه انځور شي:

$$c = \bigcap_{a \in A} a, \quad d = \bigcup_{a \in A} a$$

یا پیژند نخښه i یو ټاکلی پیژنددیري I کی وخغلي یعنی i ∈ I، په لاندي بڼه هم لیکل کیږي

$$c = \bigcap_{i \in I} a, \quad d = \bigcup_{i \in I} a$$

طبعاً یو پوره ترون یو ترون هم دی، په ورسره بلده موخه یا هدف.

۶ . ۱ . ۱۲ تعریف :د پوره ترون S د ټولو توکو غوڅی د ترون صفرتوکی بلل کیږي او په سومبول 0 سره په نخښه کیږي. دا توکي د لاندې درې شرطونو، هر یوه سره یوا- ځنی ټاکل کیدیشي. د ټولو a ∈ S لپاره باور لري

1) $0 \leq a$; 2) $0 \cap a = 0$; 3) $0 \cup a = a$.

۶ . ۱ . ۱۳ تعریف : د یو پوره ترون د ټولو توکو ټولنه د ترون یوېتوکی بلل کیږي اود سومبول 1 سره په نخښه کیږي. دا سي یوېتوکی د لاندې درې په خوښه شرطونو، له یوه څخه یواځنی ټاکلی دی : د ټولو a ⊂ S لپاره باور لري

1') $1 \geq a$; 2) $1 \cup a = 1$; 3') $1 \cap a = a$

طبعاً هغه ترونونه چی پوره ترونونه نه دي کړی شي، چی صفرتوکی او یوېتوکی (او یا یو له دوي څخه) ولري. د یوه ګروپ G د لاندې ګروپونو په ترون کی د هغه صفر توکی یونلاندېګروپ سره او یوېتوکی یی پخپله د G سره انځورېږي، د یوې کړی د لاندېکړیو په ترون کی د صفرتوکی د صفر لاندېکړی سره او پخپله د کړی R

سره انځوريږي، د يوه ډيرې M ټولو لاندېډيريو تړون
کی د تشډيري او پخپله د ډيري M سره انځوريږي.
د پرويشنی قانون له مخی منظم يا تنظيم شوي د طبيعي
گڼونو تړون او د ځنځيروني ، چی پخپله طبيعي نظم يی
جوړوي، هر وار يی صفر توکی گڼ ۱ دی، په داسی حال
چی يويتوکي موجود نه دی.

۶ . ۱ . ۱۳ جمله: يو نيم منظم ډيری S هلته او هلته
يوتړون دی، که هغه يو يويتوکی ولري او په هغی کی د
هرو، په خوښه ناتش لاندې ډيريو لپاره غوڅی موجود وي.
اوبی : د ښوونی لپاره بسيا کوي، که داسی فکر وکړو،
چی د يويتوکی د موجوديت او د د ټولو غوڅيو له موجو-
ديت څخه د ټولنی موجوديت لاس ته راځي. A دې د S
يو ناتش لاندېډيری وي. په S کي داسی توکيb موجود
دی د کوم لپاره چی $b \geq a$ دی، د ټولو $a \in A$ لپاره،
داسی يو توکی تل دا يويتوکی دی، B دې د ټولو داسی
توکو يو ناتش لاندېډيري وي او d دې د هغو غوڅی وي :

$$d = \bigcap_{b \in B} b$$

موږ به سملاسی وښايو، چی d د لاندېډيري A ټولنه
انځوروي. په رينښتيني سره $a \leq b$ دی د ټولو $a \in A$ لپاره
او د ټولو $b \in B$ ، له دې امله $a \leq d$ باور لري. وريسی
دې $s \in S$ داسی وي، چی $s \geq a$ د ټولو$a \in A$ لپاره دی.

له دې څخه $s \in B$ لاس ته راځي او له دې سره $d \leq s$.
په دې ډول دی

$$d = \bigcup_{a \in A} a$$

د یوه نیم منظم ډیري خویونه، چې یو پوره ترون(او یا هم یو ترون) وي، ځان په یوه په ځټ ایزومورفیزم ته لاښودوي (د دې سره دې لمړی برخه پرتله شي)، موږ کړی شو، چې د همدا اوس ښوول شوو جملو څخه او د هغو د نیونو یا فرضیو څخه هم د صفر توکي موجودیت او د ټولو لاندېډیریو موجودیت و غوښتل شو.

۶ . ۱ . ۱۴ تعریف: د یوه نیم منظم ډیري M ځیرونه u په نیم منظم ډیري N کی، په کوم کی چې
له $a, b \in M, a \leq b$ څخه تل $au \leq bu$ لاسته اځي، مونوتون monoton بلل کیږي(مونوتون په دې مانا، چې توکی یو په بل پسی یا لویږي او یا کوچني کیږي). یو ترون S هلته او هلته پوره ترون دی که دS په هر مونوتون ځیروني u په خپل ځان باندې فیکس توکی موجود وي، یعني توکي، د کومو لپاره چې $au = a$ دی

(Tarski , Pacif. J. Math.5 (1955) , 285 - 309 ;
David Ö Pacif. J . Math 5(1955) 311 - 319)

لکه د مخه تیرو درسونو چې وښول شو، هر نیم منظم ډیري M د ټولو لاندېډیریو په پوره ترون M کی خوندي ده.

موږ غواړو چې دا لاندې جمله وښايو

۶ . ۱ . ۱۵ جمله : هر ټرون کيدی شي ، چې په يو پوره ټرون کی ايزومورف(د ټرونونود ايزومورفي په موخه، پرتله دمخه همدا برخه) خوندي شي.
دا جمله د راتولنکي جملی څخه لاس ته راځي، چې نسبت و مخ ته تيره لمړی برخی کی وينا ته لږ تيزه وينا د :

۶ . ۱ . ۱۶ جمله : هر نيم منظم ډيری M په يو ټاکلي ټرون S کی ايزومورف خوندې دی، او دا په داسی توګه چې د هر لاندېډيري M A لپاره و کوم ته چې په M کی غوځی يا ټولنه موجود ده، چې دواړه د u په خوندیونه کی و بل ته وړل کيږي: دا داسی بلل کيږي، چې دی

$$(\bigcap_{a\in A} a)\,u = \bigcap_{a\in A} au \quad , \quad (\bigcup_{a\in A} a)\,u = \bigcup_{a\in A} au \qquad (2)$$

دا په برخه ۱ کي جوړ شوي د M خونديونه په M کی، په روښانه توګه مخ ته لرونکی شرطونو لپاره بسيانه کوي.
موږ په لاندې توګه مخ په وړاندې خو: لمړی نيسو چې ډيری M يو صفر توکی لري، که نه نو M ته يو توکی 0 صفر ورزياتوو.

۶ . ۱ . ۱۷ تعريف : يو ناتش لانديډيری M X په M کی يو ايديال بولو که:

اول) X و هر خپل توکی x ته تړل توکی y هم ...

د $y \le x$ سره.

دوم) د هر $X' \subseteq X$ لپاره، د کوم لپاره چې په M کې ټولنه موجود وي دا ټولنه په X کي هم موجود ده.

د ډیري M د ټولو ایدیالونو ډیری S نسبت د ډیریتیوري خوندیونی ته نیم منظم دی. دا چې S یو یویتوکی لري- په څرګند ډول M د خپل ځان ایدیال دی-، له دې وراخواد ایدیالونو په خوښه ډیري غوځی، چې صفر لري، او ټول د ایدیال په تیوري کی راغلي تعریفونه پوره کوي، نو ډیريS د په دې برخه کی د مخه لوستل شوو له مخی پوره ترون دی.

د یوه په خوښه توکی $a \in M$ لپاره د ټولو توکو $b \in M$ ډیری (a) د $b \le a$ سره یو ایدیال انځوري، کوم چې د a څخه راجوړ یا تولید شوی اصلي ایدیال بلل کیږي. که هر توکی $a \in M$ د هغه څخه راجوړ یا تولید ایدیال(a)باندې تنظیم شي، نو په لمړی برخه کي لوستل شوو له مخی یو ایزومورف خوندیونه u د نیم تنظیم شویډیر M ، په پوره ترون S کی، لاس ته راځي.

موږ نو نیسو ، چې په M کی د لاندېډیریو $A \subseteq M$ د هغو غوځی

$$c = \bigcap_{a \in A} a$$

موجود دی. پس لرو $c \le a$ او په دې پسی $(a) \ge (c)$ (a) د ټولو $a \in A$ لپاره.

که بیا د ټولو اصلي ایډیالونو(a) , $a \in A$ د ډیریتیور-

یکي غوڅی توکی x ولري، نو$a \leq x$ دی، د ټولو $a \in A$ لپاره او له دې امله $x \leq c$.له دې سره باور لري

$$(c) = \bigcap_{a \in A} (a)$$

او له دې سره جوخت لمړی مساوات (۲) وښوول شو.

همداسی دې و دې لاند ډیر $M \subseteq A$ ته په M کی ټولنه

$$d = \bigcup_{a \in A} a$$

موجود وي. نو $(a) \supseteq (d)$ دی د ټولو $a \in A$ لپاره.

که یو ټاکلی ایدیال X ټول $a \in A$ ولري، نو په همدې توګه د دې ټولنه هم خوندي لري. په دې لاس ته راوړنی سره $(d) \subseteq X$ دی.

له دی امله باور لري

$$(d) = \bigcup_{a \in A} (a)$$

په دې توګه مو د (۲) دوهم مساوات وښوول، او په له دې امله د جملی اوبی پوره شو.

۶ . ۱ . ۱۸ جمله :یو نیمتنظیم شوی ډیری S هلته او هلته یو پوره ترون دی، کله چی په S کی یو صفر توکیموجود وي او هر ایدیال یو اصلي ایدیال وي.

یا دونه: د دې جملي له ښوونی څخه هم دلته تیریږو .

کیدی شي په کوروش یا خوروش کې وکتل شي ..